

# Max Planck e a idéia do quantum de energia

Henrique Fleming  
Instituto de Física  
Universidade de São Paulo

## 1 Introdução

No dia 14 de dezembro de 1900, em uma palestra na Sociedade Alemã de Física, Max Planck apresentou seu famoso trabalho em que, pela primeira vez, a noção de “quantum” de energia era utilizada. A história de como esta idéia revolucionou nossa concepção do mundo é bem conhecida. Menos conhecido é, talvez, o drama pessoal que isto representou para Max Planck. Nestas notas, originalmente um seminário no Instituto de Física da USP no dia 14 de dezembro de 2000, apresento um panorama da física daquela época (no que concerne o problema do equilíbrio da radiação com a matéria) e rendo minhas homenagens a esse grande homem, que precisou sacrificar o seu credo científico na elaboração da teoria correta da radiação do corpo negro. Em recompensa a esse sacrifício, ganhou a imortalidade.

## 2 O Equilíbrio da Radiação com a Matéria

### 2.1 Primeiras Descobertas

Tire uma pedra da sombra e coloque-a à luz direta do Sol. Começará a esquentar até que, a uma determinada temperatura, cessam as mudanças. Há, então, equilíbrio entre a radiação (campos eletromagnéticos) e a matéria. Esta é a observação empírica elementar. Em 1770, Josiah Wedgwood[1] obteve o primeiro resultado científico sobre o problema em questão: a descoberta de que a cor emitida por um forno a alta temperatura independe de

qualquer detalhe do forno, seja do material de que é feito, seja do material que está no seu interior, seja da forma do forno. A cor depende só da temperatura (que é a temperatura de equilíbrio entre a matéria e a radiação) do forno.<sup>1</sup> A partir desse fato Wedgwood criou o *pirômetro ótico*, um aparelho que media a temperatura do forno pela cor da luz emitida. Tamanha foi a importância desse instrumento (de aplicação óbvia na siderurgia) que seu inventor foi eleito para a Royal Society.

## 2.2 Espectros

A segunda grande descoberta na marcha para a teoria quântica foi devida ao grande físico alemão Gustav Kirchhoff, muito conhecido em nossos dias pelas “regras de Kirchhoff” relativas a circuitos de corrente contínua. Natural de Königsberg<sup>2</sup> na então Prússia Oriental, onde obteve também sua formação científica, realizou seus trabalhos mais importantes em Heidelberg. Ali, valendo-se da presença do grande químico Bunsen, teve a idéia de utilizar os espectros de emissão e de absorção dos elementos químicos como suas “impressões digitais”, ou seja, como marcas inelutáveis de suas presenças. Foi por ocasião dessas pesquisas que Bunsen inventou a famosa fonte de luz de alto brilho e pouca capacidade calórica, o *bico de Bunsen*. Imediatamente ocorreu a Kirchhoff sua idéia mais genial: utilizar esses espectros para determinar a composição química das estrelas. Estava, assim, criada a Astrofísica. Estudos sobre a composição do Sol foram por eles publicados, e descobriram dois novos elementos, o céscio e o rubídio<sup>3</sup>. Igualmente importante para o

---

<sup>1</sup>Josiah Wedgwood entendia de fornos. Era um grande industrial da cerâmica, e a marca Wedgwood existe ainda hoje. Participava, e, de fato, era um dos principais membros, da Sociedade Lunar, um grupo de cientistas, amadores ou não, que se reuniam em Birmingham para discutir e promover o avanço da ciência na Inglaterra. Incluía, entre outros, Erasmus Darwin, avô de Charles Darwin e o famoso químico Priestley[2]

<sup>2</sup>Hoje Kaliningrad, se já não mudou de novo, na Rússia; Königsberg foi uma cidade de enorme importância cultural na Prússia. Ali nasceu e viveu, sem nunca arredar o pé, Immanuel Kant; ali vicejou a grande escola de física-matemática de Franz Neumann (1798-1894), de quem Kirchhoff foi o mais importante discípulo; ali estudaram F. Bessel, Carl Jacobi, Hermann Minkowski, Max e Willy Wien, Emil Wiechert e David Hilbert; todos haverão de ter tido ocasião de tentar resolver o problema clássico de Topologia denominado *As pontes de Königsberg*. [3] [4]

<sup>3</sup>A descoberta encontrou muitas outras aplicações, evidentemente. Francis Jehl, no interessantíssimo livro que escreveu sobre o laboratório de Edison em Menlo Park, [5] relata: *The spectroscope, which Bunsen and Kirchhoff discovered in 1859, has furnished man with a wonderful method of analysing substances through their spectra. Bunsen and*

que se segue, Kirchhoff “embebeu-se” da fenomenologia dos espectros, o que, veremos, lhe foi de grande valia para o seu estudo da radiação de equilíbrio. Nessa época descobriu empiricamente a seguinte lei fundamental: *Quando um feixe de luz atravessa um gás, este absorve aquelas frequências que, quando aquecido, emite.*

### 2.3 O Corpo Negro

É provável que Kirchhoff tenha se interessado pelo problema do equilíbrio da radiação com a matéria para dar base teórica aos resultados obtidos empiricamente no estudo dos espectros dos elementos. De fato, como veremos, um dos primeiros resultados gerais que obtém é que **no equilíbrio**, um corpo não emite uma frequência que ele não possa absorver. Mas, vamos por partes. O grande trabalho de Kirchhoff *Sobre a relação entre o poder emissivo e o poder absorptivo de corpos para o calor e a luz* contém resultados importantíssimos. Tratava-se de, através da termodinâmica, caracterizar a radiação de equilíbrio. Como ele estava partindo do nada, tinha de fazer tudo. Primeiro, identificar as quantidades relevantes. Dado um corpo em equilíbrio com a radiação, tracemos um cone a partir do corpo, abarcando um ângulo sólido  $d\Omega$ . A energia que, por segundo, atravessa uma seção reta desse cone, será escrita  $K d\Omega$ . Se selecionarmos agora aquela energia cuja frequência está entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , a energia será  $K_\nu d\Omega$ , por unidade de intervalo de frequência. Então, argumentos elementares mostram que a densidade *spectral* de energia eletromagnética (energia por unidade de volume, com frequência entre  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ , por unidade de intervalo de frequência. Ufa!) vale

$$u_\nu = \frac{8\pi}{c} K_\nu \quad (1)$$

e o resultado é o dobro do que o leitor esperava porque estamos considerando os dois estados de polarização das ondas eletromagnéticas.

A *absortividade* do corpo é definida como sendo a fração da energia que incide sobre o corpo que é transformada em calor. Denotada por  $A_\nu$ , temos, então, que a quantidade de energia que, por unidade de tempo, etc., é transformada em calor é  $A_\nu K_\nu(T)$ , pois que estas quantidades dependem da temperatura absoluta  $T$ . No equilíbrio, essa energia absorvida pelo corpo deve ser

---

*Kirchhoff did great work in that field. Edison often used the instrument and became adept in reading it.*

reposta. Seja  $E_\nu$  a emissividade do corpo, isto é, a quantidade de energia emitida pelo corpo nos mesmos  $d\Omega$ ,  $\nu$ , etc. Então, devemos ter  $E_\nu = A_\nu K_\nu(T)$ , ou

$$\frac{E_\nu}{A_\nu} = K_\nu(T) = \frac{c}{8\pi} u_\nu(T) \quad (2)$$

A seguir Kirchoff introduziu o conceito de corpo negro, um corpo que transforma em calor toda a radiação que incide sobre ele. O melhor modelo de corpo negro é uma cavidade onde a luz entra por um orifício, mas só encontra o caminho de saída depois de um número colossal de reflexões nas paredes. Em cada reflexão um pouco de sua energia é absorvida. No limite, toda é absorvida. Pois bem, usando argumentos típicos da termodinâmica da época, Kirchoff mostrou que, para um corpo negro, a densidade de energia  $u_\nu(T)$  era uma *função universal*, independendo de como o corpo negro era construído. Segue que, para qualquer corpo em equilíbrio com a radiação em uma cavidade,  $\frac{E_\nu}{A_\nu}$  é uma função universal. A emissividade para uma dada frequência e uma dada temperatura pode variar, no equilíbrio, de corpo para corpo, mas a razão  $\frac{E_\nu}{A_\nu}$  independe do corpo. Em particular, para o corpo negro,  $A_\nu = 1$ , de maneira que temos que a emissividade de um corpo negro independe do corpo. A aplicação que mais terá interessado a Kirchoff será, creio eu, a seguinte: suponhamos que, para um determinado corpo (uma certa massa de gás, por exemplo), a absorvidade para uma determinada frequência  $\nu$  seja nula. Então, como a razão  $\frac{E_\nu}{A_\nu}$  independe do corpo, teremos que, para esse gás,  $E_\nu = 0$ . Ou seja, um corpo não emite uma frequência que ele não absorva (no equilíbrio). Este resultado, anteriormente obtido empiricamente por Kirchoff, encontrava aqui sua justificação. É claro que, na descrição quântica da matéria, este resultado é trivial e mais geral, não se restringindo ao equilíbrio. Mas que pudesse ser descoberto por Kirchoff em meados do século XIX é realmente extraordinário.

## 2.4 O Grande Teorema

Para demonstrar a universalidade da função  $u_\nu(T)$  para o corpo negro, Kirchoff valeu-se das técnicas típicas da termodinâmica da época: supôs a existência de espelhos perfeitos para todas as frequências, de substâncias transparentes só para determinados intervalos de frequência, o arsenal usual. E, sobretudo, descreveu a radiação sempre sob a forma de raios. Note-se que o problema do equilíbrio da radiação com a matéria envolve calor radiante e luz, na época coisas distintas. Os grandes trabalhos de Maxwell, que pro-

puseram que a luz era radiação eletromagnética dentro de um certo intervalo de frequências, apareceram gradualmente de 1860 a 1865, enquanto que o grande trabalho de Kirchhoff[6] foi publicado em 1860. Nada se sabia, então, da natureza eletromagnética da luz. De fato, era corrente pensar-se que a luz só **existia** no intervalo visível, tratando-se a radiação térmica de outro fenômeno físico.

A demonstração de Kirchhoff é um dos grandes monumentos da física clássica. Contudo, sob olhares modernos, parece impossível que se pudesse efetivamente demonstrá-lo naquela época. É claro que Kirchhoff, mercê de sua familiaridade com os fenômenos em questão, sabia onde devia chegar, e este “mapa mental” guiou-o em todas as encruzilhadas perigosas. É assim que se faz física, afinal!

Uma magnífica exposição do trabalho de Kirchhoff, a melhor que conheço, tanto pelo aspecto crítico quanto pela sensibilidade histórica que demonstra, é a de Lorentz[7]. Uma crítica adicional, que escapa ao grande Lorentz, é relativa ao uso exclusivo de raios de luz. De fato, é bem conhecido que essa descrição é particular demais e tem efeitos termodinâmicos que não surgem se a descrição geral, por ondas, for utilizada. Pois se a luz, e toda a radiação considerada, segue trajetórias que são os raios, aplica-se à propagação o teorema de Liouville sobre o volume do espaço de fase. Neste caso pode-se, por exemplo, demonstrar que não se pode obter, com lentes e espelhos, e usando a luz do Sol, temperaturas maiores do que a da fonte[8]. Este resultado era, aparentemente, conhecido por Clausius[7]. Não se trata, obviamente, de um resultado geral, mas de uma consequência do uso de raios.

Enfim, demonstrada a existência de uma função universal para a distribuição espectral da radiação em equilíbrio térmico com a matéria, abria-se o problema de determiná-la, experimentalmente, mas também de obter sua expressão analítica, trabalho de físicos teóricos. Ou melhor, trabalhos teóricos de físicos, pois que, naquela época, não havia físicos exclusivamente teóricos, ou eram muito raros<sup>4</sup>.

### 3 Max Planck

Quando Planck era estudante, três grandes nomes dominavam o cenário da física alemã, Clausius, Helmholtz e Kirchhoff. Desses foi Clausius que

---

<sup>4</sup>Segundo Cesar Lattes não há físicos teóricos e físicos experimentais: há físicos que são capazes de fazer uma experiência, e físicos que não são capazes!

mais o influenciou, pela “clareza e poder de persuasão da linguagem” [9][10]. Tomando como ideal de física a formulação que este deu da segunda lei da termodinâmica, jamais alterada desde 1865, Planck assim expressou seu ideal: *O que me interessou desde sempre na física foram as grandes leis gerais, válidas para todo o conjunto de fenômenos, independentes das propriedades particulares dos corpos que participam do processo*[9][10]. Bem de acordo com este programa, Planck escolheu como tema de pesquisa a segunda lei da termodinâmica, que desejava demonstrar como lei exata, conseqüência das leis da mecânica. Posteriormente, convencido da implausibilidade de obtenção por esse meio da lei que, como gostava de salientar, fornece a única origem para a “flexa do tempo” (por causa do teorema dos ciclos de Poincaré), buscou a demonstração da segunda lei no eletromagnetismo, que passou então a estudar profundamente. Foi, assim, naturalmente levado ao problema de determinar a função universal de Kirchhoff: tratava-se de um resultado universal, bem a seu gosto, e envolvia, em toda a sua profundidade, o eletromagnetismo.

### 3.1 Boltzmann

Desde a descoberta de Kirchhoff vários resultados parciais importantes tinham sido obtidos, por alguns dos melhores físicos de então<sup>5</sup>. Primeiro, Boltzmann obteve o resultado empírico de Stefan, de que a densidade de energia da radiação no equilíbrio dependia da temperatura na forma

$$u = aT^4 \tag{3}$$

onde  $a$  é uma constante. Para obter este resultado, Boltzmann usou a relação de Maxwell  $p = \frac{u}{3}$ , que dá a pressão da radiação em termos da densidade de energia. Em um cilindro provido de um êmbolo existe radiação em equilíbrio à temperatura  $T$ . O volume do cilindro é  $V$ . A pressão da radiação faz com que o êmbolo se mova lentamente, realizando o trabalho  $pdV$ . A energia total da radiação sendo  $E = Vu(T)$ , temos

$$dW = pdV = \frac{1}{3}u(T)dV$$

---

<sup>5</sup>Não cabe, na brevidade deste relato, analisar as razões de tanto interesse. Há, porém, obras excelentes que o fazem. Limito-me a citar duas: o famoso livro de Kuhn[11], e as ótimas notas do professor João Zanetic[12].

e a entropia da radiação variará de

$$dS = \frac{dE + dW}{T} = \frac{1}{T}d(Vu) + \frac{1}{3T}udV$$

$$dS = \frac{4}{3} \frac{u}{T} dV + \frac{V}{T} \frac{du}{dT} dT$$

Por consistência, devemos ter

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$$

de onde segue que

$$\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{V}{T} \frac{du}{dT} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{4}{3} \frac{u}{T} \right)$$

ou ainda

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T}$$

e, finalmente,

$$u = aT^4 .$$

Êste trabalho foi considerado uma “pérola” da termodinâmica, por sua simplicidade e audácia. De fato, a radiação é tratada como um gás, e uma entropia é associada a ela. Note-se ainda que a existência da pressão da radiação, e a veracidade da fórmula de Maxwell, só viriam a ser comprovadas experimentalmente em 1905, por Lebedev.

### 3.2 A Lei de Wien

Em 1893 Willy Wien demonstrou o que seria o resultado mais forte possível de obter usando apenas as leis gerais da termodinâmica e do eletromagnetismo. Com grande virtuosismo no uso de espelhos móveis, Wien obteve a expressão

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi}{c^3} f\left(\frac{\nu}{T}\right)$$

onde  $\nu$  é, como sempre, a freqüência, e  $f$  é uma função que não se pode determinar por este método. Assim, a busca da função universal ficara reduzida à procura de uma função de **uma** variável. A demonstração mais simples da lei de Wien, baseada quase que só em análise dimensional, encontra-se no excelente texto de Sommerfeld, “Thermodynamics and Statistical Mechanics” [13],

que, aliás, apresenta um tratamento magnífico de todo o problema do corpo negro.

O próximo passo veio do próprio Wien, que propôs a seguinte fórmula empírica inspirada em seu resultado termodinâmico:

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^3 b}{c^3} \exp\left(-\frac{a\nu}{T}\right)$$

Esta fórmula obteve muito boa acolhida, estando em bom acordo com a experiência até meados de 1900. Nesta ocasião, então, Rubens conseguiu realizar medidas precisas para  $u_\nu$  para grandes comprimentos de onda, que era o grande problema experimental.

### 3.3 Os Osciladores

Como mencionamos, Planck esperava poder deduzir a segunda lei da termodinâmica como lei exata, isto é, não estatística, valendo-se do eletromagnetismo. Para esse fim aprofundou-se nessa teoria, à qual chegou a dar contribuições importantes. Por exemplo, a famosa fórmula de Larmor,

$$S = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3}$$

que dá a potência irradiada por um oscilador de Hertz, foi obtida previamente por Planck.

Suponhamos um oscilador harmônico cuja massa possui também uma carga. Seja  $\nu$  a frequência natural do oscilador. Posto numa região onde existe radiação em equilíbrio térmico, o oscilador executará oscilações forçadas, sendo a “driving force” a força elétrica que atua sobre a carga. Planck mostrou que, no equilíbrio (a dissipação considerada é a reação da radiação) estabelece-se a seguinte relação:

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} E(T, \nu)$$

onde  $E(T, \nu)$  é a energia média por período do oscilador. Num certo sentido, Planck construiu um sintetizador da radiação térmica. Note ainda que a equação acima já tem a forma da lei de Wien, sendo que a procura da função crucial  $f$  de Wien, pode ser agora feita trabalhando-se com os osciladores.



Se, nesse instante, Planck, para o cálculo da energia média, tivesse usado a estatística clássica, teria posto

$$E(T, \nu) = \frac{R}{N}T$$

ou seja, teria obtido a lei de Rayleigh (também conhecida como Rayleigh-Jeans, por razões que me escapam) um ano antes de Lord Rayleigh. Para uma dedução completa destes resultados, veja a referência[13].

### 3.4 A visita de Rubens

Heinrich Rubens e Ferdinand Kurlbaum realizaram, em 1900, medidas na região do infra-vermelho ( $\lambda = 30 - 60\mu m$ ) e concluíram que a fórmula empírica de Wien não funcionava aí. Antes deles, mas com argumentos menos contundentes, Lummer e Pringsheim tinham chegado à mesma conclusão.

Em 7 de outubro, um domingo, Rubens e sua esposa visitaram os Plancks, e Rubens relatou que achara que  $u_\nu(T)$  devia ser proporcional a  $T$  para  $\nu$  pequeno, o que era inconsistente com a fórmula de Wien. Logo que as visitas saíram, Planck atacou o problema de achar uma nova fórmula empírica que satisfizesse a nova exigência, e obteve, já numa notação que ele introduziria dois meses depois<sup>6</sup>

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp \frac{h\nu}{kT} - 1}$$

Esta fórmula teve um tal sucesso na descrição dos dados experimentais que Planck decidiu que tinha absolutamente de deduzi-la de primeiros princípios “qualquer que seja o custo”.

## 4 O Quantum

Planck voltou então ao problema dos osciladores. Tudo estava em calcular a energia média, denotada acima por  $E$ . Para osciladores em equilíbrio com radiação térmica à temperatura  $T$ , temos

$$\langle E \rangle = \frac{\int dE E \exp -\frac{E}{kT}}{\int dE \exp -\frac{E}{kT}}$$

---

<sup>6</sup>A maneira pela qual Planck obteve esta interpolação é interessante. Não temos aqui espaço para descrevê-la. Remetemo o leitor à página 149 da Ref.[13].

que é a fórmula clássica de Boltzmann. Sem mais hipóteses sobre  $E$  obtemos  $\langle E \rangle = kT$ , e a fórmula (incorreta) de Rayleigh. De maneira inteiramente pragmática, para obter a fórmula que inventara, Planck supôs que, na interação dos osciladores com a radiação, ou seja, na interação da radiação com a matéria, no equilíbrio, as energias possíveis eram da forma  $E = n\epsilon$ , com

$$\epsilon = h\nu .$$

sendo  $h$  um parâmetro a determinar experimentalmente. Neste caso o cálculo do valor médio dá:

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n\epsilon \exp \frac{n\epsilon}{kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp -\frac{n\epsilon}{kT}} = \frac{\epsilon}{\exp \frac{\epsilon}{kT} - 1}$$

ou

$$E(\nu, T) = \frac{h\nu}{\exp \frac{h\nu}{kT} - 1}$$

e, finalmente,

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{\exp \frac{h\nu}{kt} - 1}$$

que é a fórmula de Planck. Os valores permitidos para a troca de energia foram denominados “quanta” de energia. Planck falou deles: “Tratou-se de uma hipótese puramente formal, e não refleti muito sobre ela, mas apenas sobre o fato de que, sob quaisquer circunstâncias, custasse o que custasse, um resultado positivo tinha de ser obtido.”

## 4.1 O credo de Planck

A solução obtida por Planck custou-lhe muito (e muito lhe rendeu!). Suas concepções em relação à física sofreram necessariamente um abalo, que iria desenvolver-se ainda, com os anos, até fazê-lo renegá-las. Para descrever este aspecto pessoal da questão, vou me valer do ótimo artigo de Res Jost[14] que compara Boltzmann e Planck. Estarei usando a excelente tradução que me foi dada pelo Professor Walter F. Wreszinski, a quem muito agradeço. Diz Jost, “A dissertação de Planck tem o título *Sobre o Segundo Princípio da Teoria Mecânica do Calor*. A teoria mecânica do calor da época corresponde à termodinâmica de hoje. Planck acreditava na veracidade absoluta do teorema do crescimento da entropia: ele era um ENTRÓPICO. Este fato faz dele desde cedo um anti-atomista. Surpresos, lemos na sua fala por ocasião da

sua eleição como membro da Academia Prussiana: *Para finalizar gostaria de referir-me a um fato já conhecido de maneira explícita. O segundo princípio da teoria mecânica do calor, levado às últimas conseqüências, é incompatível com a suposição de que existem átomos finitos. É de se pressupor, por este motivo, que no desenvolvimento da teoria venha a se travar uma guerra entre essas duas hipóteses, que custe a vida a uma delas. Se o resultado dessa luta ainda não pode ser predito com segurança, diversos indícios parecem sugerir que, apesar dos sucessos da teoria atomística até o presente, teremos que optar pela hipótese de uma matéria contínua.*

Em 14 de dezembro de 1900, o segundo capítulo da palestra de Planck na Sociedade Alemã de Física, começa com o título: *Entropia requer desordem*. Diz Jost, “Planck havia capitulado a Boltzmann”.

## 4.2 Fim do problema

A solução completa e rigorosa (do ponto de vista físico) do problema do equilíbrio da radiação com a matéria foi dado por Einstein em 1916[15] Neste extraordinário artigo Einstein estuda o equilíbrio da radiação com um átomo “genérico”, isto é, caracterizado apenas por ter níveis de energia. Livra-se assim de todas as complicações do teorema de Kirchhoff. O quantum de energia é reconhecido como a energia de um fóton, e o equilíbrio só se dá se se admitir a existência do fenômeno da *emissão espontânea*. Vinte anos depois Dirac mostraria que este fenômeno aparece naturalmente ao se tratar o próprio campo eletromagnético como um sistema quântico. Assim, da concepção de Planck de uma natureza contínua, não sobrou pedra sobre pedra.

## References

- [1] J. Bronowski, *The Ascent of Man*, BBC, London(1973).
- [2] Schofield, Robert E., *The Lunar Society of Birmingham*, Oxford University Press, 1963.
- [3] Sommerfeld, A., *Electrodynamics*, Academic Press, N.Y. 1952.
- [4] Reid, C., *Hilbert*, Springer, 1973.
- [5] Jehl, F., *Menlo Park Reminiscences*, Dover, 1990.

- [6] Kirchhoff, G., “Sobre a relação entre o poder emissivo e o poder absorptivo de corpos para o calor e a luz”, *Ann. d. Phys. u. Chem.* (1860), pg. 275.
- [7] Lorentz, H. A., *Lectures on Theoretical Physics*, Vol.II, London, 1927.
- [8] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., “Statistical Physics” Part 1, London, 1980.
- [9] “Zur Geschichte der Auffindung des physikalischen Wirkungsquantums”, em M. Planck, *Physikalische Abhandlungen und Vorträge* Bd. 1-3 (Vieweg, Braunschweig, 1958)
- [10] Giulini, D., Straumann, N., *Ich dachte mir nicht viel dabei...* arXiv:quant-ph/0010008, 2 Oct 2000
- [11] Kuhn, T. S., *Black-Body Theory and the Quantum Discontinuity, 184-1912*, University of Chicago Press, 1987.
- [12] Zanetic, J., *Notas para o curso de Evolução dos Conceitos*, Instituto de Física, USP, não publicadas.
- [13] Sommerfeld, A., *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Academic Press, 1956.
- [14] Jost, R., “Boltzmann und Planck: Die Krise des Atomismus um die Jahrhundertwende”, Einstein Symposium Berlin, *Lecture Notes in Physics*, **100**, 128-145, Springer 1979.
- [15] Einstein, A., *Verh. Deutsch. Phys. Ges.* **18**,318(1916)