Simetrias na Física Clássica

Henrique Fleming

29-12-2001

1 Introdução

O sistema que vamos estudar é caracterizado por uma densidade lagrangeana $\mathcal{L}$. Por enquanto estaremos restritos ao espaço-tempo de Minkowski. A ação clássica, então, é:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \ , \tag{1}$$

onde tomamos $\mathcal{L}$ como função de alguns campos $\Phi(x)$ e de suas primeiras derivadas $\partial_\mu \phi(x)$. Começaremos supondo que os campos $\phi(x)$ sejam escalares, para revelar mais claramente a estrutura do método.

Uma transformação infinitesimal dos campos

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x) \tag{2}$$

induz uma variação infinitesimal $\delta\mathcal{L}$ na densidade lagrangeana. Diz-se que a transformação é uma simetria quando é possível mostrar, *sem o uso das equações do movimento*, que

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \Lambda^\mu \tag{3}$$

onde Λ^μ é um quadrivetor.

Comentários:
(i)"Sem o uso das equções de movimento", ou seja, para todas as configurações, e não somente a configuração que a natureza escolhe.
(ii)É isto que per,ite que o conceito (de simetria) tenha valor na mecânica quântica, pois ali não há a "configuração que a natureza escolhe". No formalismo de Feynman o propagador é uma soma sobre todas as configurações concebíveis. Logo, a simetria, como definida no texto, é uma simetria do propagador.

Exemplo 1:
$\mathcal{L} = \lambda\phi^*\phi$ (O asterisco $*$ representa o complexo conjugado).

A transformação infinitesimal

$$\delta\phi(x) = i\alpha\phi(x) \quad (\alpha \ \ real) \tag{4}$$

é uma simetria. de fato,

$$\delta\mathcal{L} = \lambda(\delta\phi^*)\phi + \lambda\phi^*\delta\phi = \lambda(-i\alpha\phi^*)\phi + \lambda\phi^*(i\alpha\phi) \tag{5}$$

ou

$$\delta\mathcal{L} = 0 \tag{6}$$

significando que $\Lambda^\mu = 0$. Simetrias desse tipo ($\Lambda^\mu = 0$) são ditas *simetrias internas.*
Exemplo 2: translações.
Uma translação das coordenadas

$$x'^\mu = x' - \epsilon^\mu \quad (\epsilon^\mu \ \ constante) \tag{7}$$

induz nos campos $\phi(x)$ uma transformação $\delta\Phi(x)$ que calcularemos agora. Como $\phi(x)$ é escalar,

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{8}$$

Por outro lado, expansão em potências de ϵ^μ dá

$$\begin{aligned} \phi'(x') &= \phi'(x) + (x' - x)^\lambda \partial_\lambda \phi' \\ &= \phi'(x) - \epsilon^\lambda \partial_\lambda \phi \end{aligned} \tag{9}$$

de maneira que

$$\delta\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \epsilon^\lambda \partial_\lambda \phi \tag{10}$$

Suponha que

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{11}$$

$$\delta\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\left(\partial^\mu\delta\phi\right)\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\partial^\mu\partial_\mu\left(\delta\phi\right) - m^2\phi\delta\phi$$

$$\delta\mathcal{L}(x) = \partial^\mu\phi\partial_\mu(\delta\phi) - m^2\phi\delta\phi$$

$$\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu\phi\partial^\mu(\epsilon^\lambda\partial_\lambda\phi) - m^2\phi(\epsilon^\lambda\partial_\lambda\phi) \tag{12}$$

$$\delta\mathcal{L}(x) = \epsilon^\lambda\partial_\lambda\mathcal{L} = \partial_\lambda\left(\epsilon^\lambda\mathcal{L}\right) = \partial_\lambda\Lambda^\lambda \tag{13}$$

o que mostra que translações são simetrias do sistema descrito pela lagrangeana exibida.

2 O teorema de Noether

O teorema de Noether afirma que a cada simetria contínua corresponde uma corrente que satisfaz uma equação de continuidade, ou, equivalentemente, uma quantidade que é conservada. Além disso, o teorema fornece uma expressão explícita para a corrente.

Seja $\delta\Phi$ uma transformação de simetria. Então existe Λ^μ tal que

$$\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\mu\Lambda^\mu \tag{14}$$

Um cálculo independente de $\delta\mathcal{L}$, *desta vez usando as equações de movimento*, será realizado agora.

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi \tag{15}$$

As equações de movimento são

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \tag{16}$$

que, usadas em (15), dão

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta\phi \tag{17}$$

ou seja,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) \tag{18}$$

Subtraíndo (18) de (14), tem-se

$$\partial_\mu\left(\Lambda^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) = 0 \tag{19}$$

que é o teorema de Noether. A quantidade

$$J^\mu \equiv \Lambda^\mu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi \tag{20}$$

é a corrente de Noether associada à simetria $\delta\phi$.

2.1 Exemplo 1: translações

Vimos que, neste caso,

$$\Lambda^\mu = \epsilon^\mu\mathcal{L} \tag{21}$$

$$\delta\phi = \epsilon^\nu\partial_\nu\mathcal{L} \tag{22}$$

A equação (20) dá, então,

$$J^\mu = -\epsilon^\nu\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}\right\}\ ' \tag{23}$$

que é a corrente de Noether. Como os ϵ^ν são constantes arbitrárias, a lei de conservação

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{24}$$

pode ser escrita

$$\partial_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \tag{25}$$

onde

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi - \delta^\mu{}_\nu\mathcal{L}\ , \tag{26}$$

que reconhecemos como o tensor de momento-energia canônico.

2.2 Exemplo 2: transformações de Lorentz

As transformações infinitesimais de Lorentz

$$x'^\mu = x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu \tag{27}$$

com $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ constantes, são um caso particular das transformações infinitesimais gerais

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) \tag{28}$$

onde $\epsilon^\mu(x)$ é um campo vetorial infinitesimal. Para um escalar, temos

$$\delta\phi(x) = -\epsilon^\lambda(x)\partial_\lambda\phi(x) \ . \tag{29}$$

Supondo que $\mathcal{L}(x)$ seja um escalar sob essas transformações, temos ainda

$$\delta\mathcal{L}(x) = -\epsilon^\lambda(x)\partial_\lambda\mathcal{L}(x) \ . \tag{30}$$

Para transformações de Lorentz temos, respectivamente,

$$\delta\phi(x) = -\omega^\lambda{}_\nu x^\nu \partial_\lambda\phi(x) \tag{31}$$

$$\delta\mathcal{L}(x) = -\omega^\lambda{}_\nu x^\nu \partial_\lambda\mathcal{L}(x) \ . \tag{32}$$

Como $\omega^{\mu\nu}$ é antissimétrio, temos

$$\begin{aligned} \partial_\lambda\left(-\omega^\lambda{}_\nu x^\nu \mathcal{L}\right) &= -\omega^\lambda{}_\nu \delta^\nu{}_\nu \mathcal{L} - \omega^\lambda{}_\nu x^\nu \partial_\lambda\mathcal{L} && (33)\\ &= -\omega^\lambda{}_\lambda \mathcal{L} - \omega^\lambda{}_\nu x^\nu \partial_\lambda\mathcal{L} && (34)\\ &= 0 - \omega^\lambda{}_\nu x^\nu \partial_\lambda\mathcal{L} && (35) \end{aligned}$$

e então

$$\delta\mathcal{L}(x) = \partial_\lambda\left(-\omega^\lambda{}_\nu x^\nu \mathcal{L}\right) = \partial_\lambda\Lambda^\lambda \ . \tag{36}$$

A equação de continuidade de Noether então é:

$$\partial_\mu\left\{-\omega^\mu{}_\nu x^\nu \mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \omega^\lambda{}_\beta x^\beta \partial_\lambda\phi(x)\right\} = 0 \tag{37}$$

que pode ser escrita

$$\omega^{\lambda\beta}\partial_\mu\left\{x_\beta \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\lambda\phi - \delta^\mu{}_\lambda x_\beta \mathcal{L}\right\} = 0 \tag{38}$$

ou

$$\omega^{\lambda\beta}\partial_\mu\left\{x_\beta T^\mu{}_\lambda\right\} = 0 \ , \tag{39}$$

onde $T^\mu{}_\lambda$ é o tensor de momento-energia canônico. Mas os $\omega^{\lambda\beta}$ não são inteiramente arbitrários, já que são antissimétricos. Então, da euqção acima, segue apenas que a parte antissimétrica do termo em colchete (antissimétrica em $\lambda \leftrightarrow \beta$) é nula. Logo,

$$\partial_\mu\left\{x_\beta T^\mu{}_\lambda - x_\lambda T^\mu{}_\beta\right\} = 0 \ , \tag{40}$$

que usualmente é escrita

$$\partial_\mu M^\mu{}_{\beta\lambda} = 0 \tag{41}$$

onde

$$M^\mu{}_{\beta\lambda} = x_\beta T^\mu{}_\lambda - x_\lambda T^\mu{}_\beta \tag{42}$$

é o tensor de momento angular.

2.3 Exemplo 3: Eletromagnetismo

O campo eletromagnético livre é um campo eletromagnético na ausência de fontes, isto é, com $\vec{j} = 0$ e $\rho = 0$. Por exemplo, uma onda eletromagnética se propagando numa região do espaço onde não há cargas. É descrito pela densidade lagrangeana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{43}$$

com

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ . \tag{44}$$

No formalismo canônico as variáveis são os A_μ. Sob translações temos

$$\delta A_\mu(x) = -\epsilon^\lambda \partial_\lambda A_\mu(x) \tag{45}$$

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\lambda \left(-\epsilon^\lambda \mathcal{L}\right) \tag{46}$$

e a corrente de Noether então é

$$J^\mu = -\epsilon^\mu \mathcal{L} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \epsilon^\lambda \partial_\lambda A_\nu \ . \tag{47}$$

Como

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} \ , \tag{48}$$

podemos escrever

$$J^\mu = -\epsilon^\mu \mathcal{L} - F^{\mu\nu} \epsilon^\lambda \partial_\mu A_\nu \ . \tag{49}$$

A lei de conservação

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{50}$$

pode ser escrita

$$\partial_\mu J^\mu = \epsilon^\lambda \partial_\mu \left(-F^{\mu\nu} \partial_\lambda A_\nu - \delta^\mu{}_\lambda \mathcal{L}\right) = 0 \ \ , \tag{51}$$

e o tensor

$$T^\mu{}_\lambda = -F^{\mu\nu} \partial_\lambda A_\nu - \delta^\mu{}_\lambda \mathcal{L} \tag{52}$$

é o tensor de momento-energia canônico. Há três comentários a fazer:
(i)O tensor não é independente de gauge. De fato, sob a transformação de gauge

$$A_\nu \to A_\nu + \partial_\nu \Lambda \tag{53}$$

temos

$$
\begin{aligned}
T^{\mu}{}_{\lambda} &\rightarrow T'^{\mu}_{\lambda} = -F^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\left(A_{\nu}+\partial_{\nu}\Lambda\right) - \delta^{\mu}{}_{\lambda}\mathcal{L} && (54)\\
T'^{\mu}_{\lambda} &= T^{\mu}{}_{\lambda} - F^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\nu}\Lambda && (55)\\
\partial_{\mu}T^{\mu}{}_{\lambda} &= \partial_{\mu}T^{\mu}{}_{\lambda} - \partial_{\mu}\left(F^{\mu\nu}\partial_{\lambda}\partial_{\nu}\Lambda\right) && (56)\\
\partial_{\mu}T^{\mu}{}_{\lambda} &= 0 - F^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\lambda}\partial\nu\Lambda = 0 && (57)
\end{aligned}
$$

onde usamos as equções de Maxwell $\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0$ e a antissimetria de $F^{\mu\nu}$ contraída com a simetria de $\partial_{\mu}\partial_{\nu}\Lambda$. Não só T'^{μ}_{λ} satisfaz a mesma equação de continuidade que $T^{\mu}{}_{\lambda}$: as quantidades conservadas são também as mesmas.

$$
\begin{aligned}
\int d^3x T'^{0}{}_{\lambda} &= \int d^3x T^{0}{}_{\lambda} - \int d^3x F^{0i}\partial_{\lambda}\partial_{\nu}\Lambda && (58)\\
&= \int d^3x T^{0}{}_{\lambda} - \int d^3x \partial_{\nu}\left(F^{0\nu}\partial_{\lambda}\Lambda\right)
\end{aligned}
$$

onde usamos de novo as equações de Maxwell ($\partial_{\nu}F^{0\nu} = 0$).

(ii)O tensor não é simétrico, i.é,

$$T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}\ . \tag{59}$$

Embora isto não seja crucial, põe problemas para a teoria de Einstein da gravitação, onde o segundo membro da euqção fundamental é o tensor de momento-energia, e o primeiro termo é simétrico. A ausência de simetria é ainda indesejável porque a expressão para o momento angular, em termos do momento linear, não fica tão elegante. Mas é assim que a natureza é! Suponha que $T_{\mu\nu}$ fosse sempre simétrico. Então,

$$
\begin{aligned}
\partial^{\mu}\left(X_{\beta}T_{\mu\lambda} - x_{\lambda}T_{\mu\beta}\right) &= \delta^{\mu}{}_{\beta}T_{\mu\lambda} + x_{\beta}\partial^{\mu}T_{\mu\lambda} - \delta^{\mu}{}_{\lambda}T_{\mu\beta} - x_{\lambda}\partial^{\mu}T_{\mu\beta} && (60)\\
&= T_{\beta\lambda} - T_{\lambda\beta} + x_{\beta}\partial^{\mu}T_{\mu\lambda} - x_{\lambda}\partial^{\mu}T_{\mu\beta}\\
&= x_{\beta}\partial^{\mu}T_{\mu\lambda} - x_{\lambda}\partial^{\mu}T_{\mu\beta}
\end{aligned}
$$

e a conservação do momento linear implicaria sempre na conservação do momento angular, o que não pode ser, já que são associadas a transformações por parâmetros independentes.

(iii)É costume trabalhar com um tensor de momento-energia modificado (mas equivalente, no sentido de que os momentos $P^{\mu} = \int d\sigma_{\lambda}T^{\mu\lambda}$ são os mesmos) e simétrico, chamado de tensor de Belinfante-Rosenfeld. Retomamos a relação

$$\delta A_{\nu}(x) = -\epsilon^{\lambda}\partial_{\lambda}A_{\nu}(x) \tag{61}$$

e somamos a ela, e subtrímos, $-\epsilon^{\lambda}\partial_{\nu}A_{\lambda}$. Temos

$$\delta A_{\nu}(x) = -\epsilon^{\lambda}\left(\partial_{\lambda}A_{\nu} - \partial - \nu A_{\lambda}\right) - \epsilon^{\lambda}\partial_{\nu}A_{\lambda} \tag{62}$$

Usando esta expressão na corrente de Noether, tem-se

$$J^{\mu} = -\epsilon^{\mu}\mathcal{L} - \epsilon^{\lambda}F^{\mu\nu}\left(F_{\lambda\nu} + \partial_{\nu}A_{\lambda}\right) \tag{63}$$

e a lei de conservação é

$$0 = \partial_{\mu}J^{\mu} = \epsilon^{\lambda}\partial_{\mu}\left(-F^{\mu\nu}F_{\lambda\nu} - \delta^{\mu}{}_{\lambda}\mathcal{L}\right) - \epsilon^{\lambda}\partial_{\mu}\left(F^{\mu\nu}\partial_{\nu}A_{\lambda}\right) \tag{64}$$

Mas, no último termo, $\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = 0$ (Maxwell) e $F^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}A_{\lambda} = 0$ (simetria). Logo,

$$T'^{\mu}{}_{\lambda} = -F^{\mu\nu}F_{\lambda\nu} - \delta^{\mu}{}_{\lambda}\mathcal{L} \tag{65}$$

satisfaz

$$\partial_\mu T'^\mu{}_\lambda = 0 \tag{66}$$

bem como $T'^{\mu\lambda} = T'^{\lambda\mu}$. Tem-se ainda que

$$\int d^3x T'^0{}_\mu = \int d^3x T^0{}_\mu \tag{67}$$

É este $T'^\mu{}_\lambda$ que é denominado tensor de Belinfante- Rosenfeld.