Dinâmica e Leis de Conservação

Henrique Fleming

26-12-2001

1 Dinâmica

Apresentamos nestas notas o tratamento do princípio variacional no estilo de Julian Schwinger. Não há nada de novo aqui: reproduzo, essencialmente, os escritos do mestre, comentando, quando há utilidade no comentário, alguma passagem, ou ilustrando as idéias com algum exemplo. Em minha opinião este tratamento do princípio variacional é particularmente elegante no que tange as consequências das simetrias: o teorema de Noether é obtido de maneira muito econômica, e os geradores dos grupos de transformações de invariância recebem o destaque devido. Isto aproxima muito o método de Schwinger do método original de Emmy Noether.

Isto é um trabalho em andamento. Ao poucos irei acrescentando exemplos e generalizando as situações tratadas.

Consideraremos primeiro a mecânica quântica de um sistema com um número finito de graus de liberdade. Sejam
$|a'\rangle$: estado do sistema na representação a.
$|b'\rangle$: o mesmo, na representação b.

A função de transformação $(a'|b')$ liga as duas representações:

$$|a'\rangle = \sum_{b'} (b'|a')|b'\rangle$$

de onde segue que

$$\langle b'|a'\rangle = (b'|a')$$

e, em particular, que

$$(b'|a')^* = (a'|b') \ .$$

Uma relação fundamental é

$$\sum_{b'} (a'|b')(b'|c') = (a'|c')$$

Se $\delta(a'|b')$ e $\delta(b'|c')$ são quaisquer variações infinitesimais, então, da relação acima,

$$\delta(a'|c') = \sum_{b'} \{\delta(a'|b')\ (b') + (a'|b')\delta(b'|c')\} \quad (1)$$

e

$$\delta(a'|b')^* = \delta(b'|a') \tag{2}$$

Além disso, $\delta(a'|b')$ pode ser pensado como a matriz de um operador na representação ab:

$$\delta(a'|b') = i\langle a'|\delta W_{ab}|b'\rangle \tag{3}$$

A relação acima para as variações então dá:

$$\langle a'|\delta W_{ac}|c'\rangle = \sum_{b'} \{\langle a'|\delta W_{ab}|b'\rangle(b'|c') + (a'|b')\langle b'|\delta W_{bc}|c'\rangle\} \tag{4}$$

o que é equivalente a

$$\delta W_{ac} = \delta W_{ab} + \delta W_{bc} \tag{5}$$

Daí segue (tomando-se $a = b$) que

$$\delta W_{aa} = 0 \tag{6}$$

e que, tomando-se $a = c$,

$$\delta W_{ba} = -\delta W_{ab}\ . \tag{7}$$

Além disso, como

$$\delta(a'|b')^* = -i\langle a'|\delta W_{ab}|b'\rangle^* = -i\langle b'|\delta W_{ab}^\dagger|a'\rangle \tag{8}$$

e, como $\delta(b'|a') = i\langle b'|\delta W_{ba}|a'\rangle$, temos

$$\delta W_{ab}^\dagger = -\delta W_{ba} = \delta W_{ab}\ , \tag{9}$$

ou seja, os operadores δW_{ab} são hermiteanos.

A dinâmica, ou seja, a evolução temporal, pode ser estudada como uma seqüência de transformações geradas pelas funções $(a_1' t_1|a_2' t_2)$, onde as representações se distinguem pelo tempo.

$$\delta(a_1' t_1|a_2'' t_2) = i\langle a_1' t_1|\delta W_{12}|a_2'' t_2\rangle \tag{10}$$

e, como antes,

$$\delta W_{12} + \delta W_{23} = \delta W_{13}\ . \tag{11}$$

2 Postulado dinâmico fundamental

O postulado dinâmico fundamental declara que existe um operador W_{12} tal que

$$\delta W_{12} = \delta\left[W_{12}\right]\ . \tag{12}$$

Daí segue imediatamente que $W_{12}^\dagger = W_{12}$ e que

$$W_{12} + W_{23} = W_{13} \tag{13}$$

Se a transformação de a_1, t_1 em a_2, t_2 é obtida por uma sucessão de transformações infinitesimais, temos

$$W_{12} = \sum_{t_1}^{t_2} W_{t+dt,\, t} \tag{14}$$

com $W_{t,t} = 0$. Escrevendo

$$W_{t+dt,t} = dt\; L(t) \tag{15}$$

pomos

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} dt\; L(t) \tag{16}$$

Definição: uma simetria é uma transformação que deixa inalterada a função de transformação. Ou seja, sob uma transformação que é uma simetria,

$$\delta(a_1' t_1 | a_2' t_2) = 0 \tag{17}$$

As transformações em $(a_1' t_1 | a_2' t_2)$ surgem de transformações nos estados $|a_1' t_1\rangle$ e $|a_2' t_2\rangle$. Temos

$$\begin{aligned} \delta\langle a_1' t_1| &= -i\langle a_1' t_1|G_1 && (18)\\ \delta|a_2' t_2\rangle &= iG_2|a_2' t_2\rangle && (19) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\delta(a_1' t_1 | a_2' t_2) = i\langle a_1' t_1 | G_1 - G_2 | a_2' t_2\rangle = \langle a_1' t_1 | \delta W_{12} | a_2' t_2\rangle\ , \tag{20}$$

o que quer dizer que

$$\delta W_{12} = \delta \left\{ \int_{t_1}^{t_2} dt\; L \right\} = G_1 - G_2 \tag{21}$$

ou seja, a variação da ação proveniente das transformações

$$\begin{aligned} \delta\langle a_1' t_1| &= -i\langle a_1' t_1|G_1 && (22)\\ \delta|a_2' t_2\rangle &= iG_2|a_2' t_2\rangle && (23) \end{aligned}$$

depende, para a evolução física do sistema, só de quantidades nos extremos. Ora, a variação contém ainda trmos que dependem dos instantes intermediários entre t_1 e t_2. Logo, outra maneira de formular (21) é dizer que, para variações que se anulam nos extremos, a evolução física satisfaz a

$$\delta W_{12} = 0\ , \tag{24}$$

que é a forma usual do princípio variacional.

Suponhamos agora que as transformações geradas pelos G sejam simetrias. Então $\delta W_{12} = 0$, e, em conseqüência,

$$G_1 \equiv G(t_1) = G(t_2) \equiv G_2 \tag{25}$$

ou seja, os geradores são constantes do movimento.

Quando se calcula

$$\delta \left\{ \int_{t_1}^{t_2} L \, dt \right\}$$

aparecem, além dos termos "de superfície", que dependem só dos instantes extremos, outros termos, que devem, pelo prinípio dinâmico, se anular. Uma maneira de obtê-los é restringir-se a transformações ("variações") que se anulam nos extremos. Daí vem o usual "prinípio de mínima ação": a ação é estacionária para variações que se anulam nos extremos.

2.1 Campos

Campos possuem um número infinito de graus de liberdade. Denotaremos por

$$|\zeta'(\sigma)\rangle$$

os estados caracterizados por um conjunto completo de variáveis conpatíveis ζ, que são os campos, em um determinado instante, ou numa superfície de tipo espaço σ. Como no caso anterior, temos

$$\delta\left(\zeta'(\sigma_0)|\zeta'(\sigma)\right) = i\langle\zeta'(\sigma_0)|\delta W|\zeta'(\sigma)\rangle \tag{26}$$

Suponhamos que os observáveis sejam submetidos a uma variação

$$\delta\zeta = i[F(\sigma), \zeta] \; ,$$

que afeta também os estados, levando-os a $|\zeta'\rangle + \delta|\zeta'\rangle$, com

$$\begin{aligned} \delta|\zeta'\rangle &= iF(\sigma)|\zeta'\rangle \; , & (27) \\ \delta|\zeta_0'\rangle &= iF(\sigma_0)|\zeta_0'\rangle & (28) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \delta\left(\zeta'(\sigma_0)|\zeta'(\sigma)\right) &= i\langle\zeta_0'|F(\sigma) - F(\sigma_0)|\zeta'\rangle & (29) \\ &= i\langle\zeta_0'|\delta W|\zeta'\rangle \\ \delta W &= F(\sigma) - F(\sigma_0) \\ W &= \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathcal{L} d^4x \end{aligned}$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade lagrangeana.
Exemplo: campos escalares.
Os campos são descritos por operadores $\phi_r(x)$ que têm propriedades de transformação simples, sob mudanças de referencial. Seja L uma transformação de Lorentz infinitesimal.

$$L : x'^{\,\mu} = x^\mu - \delta x^\mu \quad (x' = Lx) \tag{30}$$

$$\delta x^\mu = \delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu + \epsilon^\mu \tag{31}$$

$$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu} \tag{32}$$

A fórmula de transformação é

$$\phi'_r(x) = U(L)\phi_r(x)U^{-1}(L) \tag{33}$$

$$\phi'_r(Lx) = S_r{}^s\phi_s(x) \tag{34}$$

Os campos mais simples são os escalares. Têm só uma componente, e

$$\phi'(x') = \phi(x) \tag{35}$$

Como

$$x'^\mu = x^\mu - \delta\omega^{\mu\nu}X_\nu - \delta\epsilon^\mu \equiv x^\mu + \xi^\mu(x) \tag{36}$$

e

$$\phi'(x') = \phi'(x) + \xi^\lambda(x)\partial_\lambda\phi(x0 \tag{37}$$

temos

$$\phi'(x) = \left(\delta\omega^{\lambda\nu}x_\nu + \delta\epsilon^\lambda\right)\partial_\lambda\phi + \phi(x) \tag{38}$$

logo,

$$\phi(x) + \delta\omega^{\lambda\nu}x_\nu\partial_\lambda\phi + \delta\epsilon^\lambda\partial_\lambda\phi = \phi(x) + i\left[\delta\epsilon^\lambda P_\lambda + \frac{1}{2}\delta\omega^{\lambda\nu}J_{\lambda\nu}, \phi\right] \tag{39}$$

o que dá,

$$[P_\lambda, \phi(x)] = -i\partial_\lambda\phi \tag{40}$$

e

$$[J_{\lambda\nu}, \phi(x)] = -i(x_\nu\partial_\lambda\phi - x_\lambda\partial_\nu\phi) \tag{41}$$

Seja agora $\mathcal{L}$ a densidade lagrangeana que é um escalar que depende de $\phi(x)$ e de suas derivadas $\partial_\mu\phi(x)$. Utilizando variações geradas por transformações do grupo de Poincaré, a equação dinâmica básica

$$\delta\int_{\sigma_0}^{\sigma}\mathcal{L}d^4x = F(\sigma) - F(\sigma_0) \tag{42}$$

vai permitir dterminar a expressão dos geradores do grupo de Poincaré em termos dos campos ϕ e suas derivadas. As variações geradas por transformações de Poincaré transformam a região X (espaço-tempo delimitado pelas superfícies de tipo espaço σ_0 e σ) na região X'. A variação é

$$\delta\int_{\sigma_0}^{\sigma}\mathcal{L}d^4x = \int_{X'}\mathcal{L}'(x')d^4x' - \int_X\mathcal{L}(x)d^4x \tag{43}$$

Mas

$$\int_{X'}\mathcal{L}'(x')d^4x' = \int_X\mathcal{L}'(x'(x))det\left(\frac{\partial(x'^i)}{\partial x^k}\right)d^4x \tag{44}$$

Por outro lado, para a transformação $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$, temos

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} = \delta^{\mu}{}_{\lambda} + \partial_{\lambda}\xi^{\mu} \tag{45}$$

e

$$det\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right) = (1+\partial_0\xi^0)(1+\partial_1\xi^1)(1+\partial_2\xi^2)(1+\partial_3\xi^3) = 1+\partial_{\lambda}\xi^{\lambda} \tag{46}$$

o que permite escrever

$$\int_{X'} \mathcal{L}'(x')d^4x' = \int_X \mathcal{L}'(x'(x))(1+\partial_{\lambda}\xi^{\lambda})d^4x \tag{47}$$

e, como $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}'(x) + \xi^{\mu}\partial_{\mu}\mathcal{L}$, temos

$$\int_{X'} \mathcal{L}'(x')d^4x' = \int_X (1+\partial_{\lambda}\xi^{\lambda})d^4x\,(\mathcal{L}'(x) + \xi^{\mu}\partial_{\mu}\mathcal{L}) \tag{48}$$

$$= \int_X \mathcal{L}'(x)d^4x + \int_X d^4x\left\{(\partial_{\lambda}\xi^{\lambda})\mathcal{L} + \xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\mathcal{L}\right\} \tag{49}$$

Então,

$$\delta\int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathcal{L}d^4x = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \delta\mathcal{L}(x)d^4x + \int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x\partial_{\mu}\left(\xi^{\mu}\mathcal{L}\right) \tag{50}$$

Mas

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L}(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\partial_{\mu}\phi \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}\delta\phi(x) + \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\phi\right) - \left(\partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right)\delta\phi\end{aligned} \tag{51}$$

o que dá

$$\begin{aligned}\delta\int_{\sigma_0}^{\sigma}\mathcal{L}d^4x &= \int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} - \partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right\}\delta\phi \\ &+ \int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x\left\{\partial_{\mu}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\phi) + \partial_{\mu}(\xi^{\mu}\mathcal{L})\right\}\end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned}\delta\int_{\sigma_0}^{\sigma}\mathcal{L}d^4x &= \int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} - \partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right\}\delta\phi \\ &+ \int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x\partial_{\mu}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\delta\phi + \xi^{\mu}\mathcal{L}\right\}\end{aligned} \tag{53}$$

Temos ainda que $\delta\phi = -\xi^{\lambda}\partial_{\lambda}\phi$, e então

$$\begin{aligned}\delta\int_{\sigma_0}^{\sigma}\mathcal{L}d^4x &= \int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)} - \partial_{\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\right\}\delta\phi \\ &+ \int_{\sigma_0}^{\sigma} d^4x\partial_{\mu}\left\{-\xi^{\lambda}\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)}\partial_{\lambda}\phi - \delta^{\mu}{}_{\lambda}\mathcal{L}\right]\right\}\end{aligned} \tag{54}$$

Equivalentemente,

$$\begin{aligned}\delta\int_{\sigma_0}^{\sigma}\mathcal{L}d^4x &= \int_{\sigma_0}^{\sigma}d^4x\left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right\}\delta\phi \\ &+ F(\sigma)-F(\sigma_0)\end{aligned} \tag{55}$$

com

$$F(\sigma)=\int_\sigma d\sigma_\mu\left\{-\xi^\lambda\Theta^\mu{}_\lambda\right\} \tag{56}$$

Logo, o princípio dinâmico diz que

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi(x)}-\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}=0 \tag{57}$$

Tomando os F como geradores do grupo de Poincaré, que é um grupo de simetrias do sistema, temos

$$\delta\int_{\sigma_0}^{\sigma}\mathcal{L}d^4x=0 \quad\rightarrow\quad F(\sigma)=F(\sigma_0) \tag{58}$$

e os geradores são constantes do movimento.

Como

$$F(\sigma)=\int_\sigma d\sigma_\mu\left\{-\xi^\lambda\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\lambda\phi-\delta^\mu{}_\lambda\mathcal{L}\right]\right\}=\int_\sigma d\sigma_\mu\left\{-\xi^\lambda\Theta^\mu{}_\lambda\right\} \tag{59}$$

temos, pondo

$$-\xi^\lambda=\delta\omega^{\lambda\nu}x_\nu+\delta\epsilon^\lambda \tag{60}$$

que

$$\begin{aligned}F(\sigma) &= \int_\sigma d\sigma_\mu\left(\delta\omega^{\mu\nu}x_\nu\Theta^\mu_\lambda+\delta^\lambda_\epsilon\Theta^\mu{}_\lambda\right) \\ &= \delta\epsilon^\lambda\int_\sigma d\sigma_\mu\Theta^\mu{}_\lambda+\frac{1}{2}\delta\omega^{\lambda\nu}\int_\sigma d\sigma_\mu\left(x_\nu\Theta^\mu{}_\lambda-x_\lambda\Theta^\mu{}_\nu\right)\end{aligned} \tag{61}$$

de onde se conclui que

$$P_\lambda=\int_\sigma d\sigma_\mu\Theta^\mu{}_\lambda \tag{62}$$

e

$$J_{\lambda\nu}=\int_\sigma d\sigma_\mu\left(x_\nu\Theta^\mu{}_\lambda-x_\lambda\Theta^\mu{}_\nu\right) \tag{63}$$

sendo que

$$\Theta^\mu{}_\lambda=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial\phi)}\partial_\lambda\phi-\delta^\mu{}_\lambda\mathcal{L} \tag{64}$$

é o tensor de momento-energia canônico. As leis de conservação podem ser escritas

$$P_\lambda=\int d^3x\Theta^0{}_\lambda \;=\; cte. \tag{65}$$

$$J_{\lambda\nu} = \int d^3x \left(x_\nu \Theta^0_\lambda - x_\lambda \Theta^0_\nu\right) \quad = \quad cte. \tag{66}$$

O teorema de Noether é isso: dado um grupo de simetria, os geradores desse grupo (1 para cada parâmetro) são constantes do movimento.