Campos vetoriais *for the practical man*

Henrique Fleming

1 Introdução

Como é sugerido pelo título, estas notas apresentam o formalismo dos campos vetoriais na forma em que é normalmente usado pelos físicos (considerados aqui *practical men*!). Por segurança, é bom sempre acender uma vela a Deus e outra ao diabo. Por isso, no final deste texto, apresento a formulação que os matemáticos do século XX preferem. Os resultados são os mesmos, é claro, mas há avanços conceituais importantes. Os físicos também já estão tendo de aprender essas novas idéias, de maneira que eu recomendo a todos a leitura. Essa parte não será usada no curso, a não ser por uma ou outra alusão.

Um campo vetorial é uma função que associa, a cada ponto do espaço, um vetor. O exemplo mais concreto e elementar é o campo de velocidades de um fluido[1]. Um fluido é um meio contínuo, e isto se reflete na variação contínua dos valores da velocidade, quando se percorre o fluido.

Matematicamente, um campo vetorial é uma função

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

que é contínua e diferenciável. O que isto significa, vamos explicar agora.

Na expressão acima, o $\mathbb{R}^3$ do lado direito é considerado como o espaço vetorial usual construído sobre o conjunto $\mathbb{R}^3$. Então, a cada ponto do espaço, dado por três coordenadas, associa-se uma outra terna de números, que são as componentes de um vetor numa base dada. Uma função como a descrita acima, denotada mais simplesmente por $\vec{f}(x, y, z)$, pode ser escrita como uma terna de funções $(f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z))$. Diz-se que $\vec{f}$ é contínua e diferenciável quando cada uma das três componentes, $f_x(x, y, z)$, $f_y(x, y, z)$, $f_z(x, y, z)$ for contínua e diferenciável. Como estas funções são funções de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, suas continuidade e diferenciabilidade já foram definidas e descritas em "Diferenciabilidade *for the practical man*".

[1] Veja em Nussenzveig, *Física Básica*, Vol.2,§2.1, uma cuidadosa explicação do método de Euler de descrição das velocidades de um fluido.

Resumindo, um campo vetorial é uma função que associa a cada ponto um vetor, cujas componentes variam, de ponto para ponto, de maneira contínua e diferenciável. Isto significa que podemos calcular as derivadas parciais dessas componentes, obtendo novas funções contínuas. Um campo vetorial constante, ou seja, que associa a cada ponto do espaço o mesmo vetor, é chamado, entre os físicos, de *campo uniforme*. Entre os físicos prefere-se usar o termo campo constante para um campo cujos valores (ou seja, cujos vetores) *independem do tempo*. Portanto, quando se falar em campo constante, é necessário explicar-se.

A descrição de um fluido utiliza também *campos escalares*. Estes são, simplesmente funções

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

contínuas e diferenciáveis. Um exemplo é a densidade do fluido, que pode variar de ponto a ponto (como a densidade do ar, que depende da altitude).

Seja $\phi(x, y, z)$ um campo escalar. Podemos calcular o seu gradiente, $\vec{\nabla}\phi(x, y, z)$, e temos

$$\vec{\nabla}\phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} = \vec{V}(x, y, z) \tag{1}$$

ou seja, o gradiente de um campo escalar é um campo vetorial. Campos vetoriais que são obtidos desta forma têm um papel muito importante na física, como veremos mais tarde.

2 O operador diferencial $\vec{\nabla}$

Considere a expressão

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\ . \tag{2}$$

Como vimos, o gradiente de um campo escalar $\phi(x, y, z)$ pode ser escrito como $\vec{\nabla}\phi(x, y, z)$, entendendo-se esta notação como

$$\vec{\nabla}\phi(x, yz) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\phi(x, yz) \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{k} \tag{3}$$

Seja agora $\vec{V}(x, y, z)$ um campo vetorial, e considere a expressão

$$\vec{\nabla}.\vec{V} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec{i}.\vec{V} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j}.\vec{V} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.\vec{V} \tag{4}$$

$$= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{5}$$

cujo resultado é um campo escalar. Este campo escalar, $\vec{\nabla}.\vec{V}$, é denominado "divergente de $\vec{V}$", e, veremos, tem também uma grande importância na descrição física (e matemática) dos campos vetoriais.

2.1 Exemplos e exercícios

1. Considere o campo vetorial $\vec{r}(x,y,z)$, definido por

$$\vec{r}(x,y,z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \tag{6}$$

Podemos calcular o $\vec{\nabla}.\vec{r}$, também denotado por $div(\vec{r})$.

$$div(\vec{r}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 = 1 = 3 \tag{7}$$

2. O campo vetorial $\vec{V}(x,y,z) = \vec{\nabla}\phi(x,y,z)$ tem o divergente

$$div\vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \tag{8}$$

mas, como

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ V_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ V_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned}$$

obtemos

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{9}$$

Esta última expressão é chamada *laplaceano* de ϕ, e é, talvez, o operador diferencial mais importante de todos. Usaremos para ele a notação $\vec{\nabla}^2\phi$. Encontra-de também, mas já está um pouco fora de moda, a notação $\triangle\phi$. Assim,

$$\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\phi = \vec{\nabla}^2\phi = \triangle\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \tag{10}$$

3.(Exercício) Seja $\vec{V}(x,y,z)$ um campo vetorial, e $\phi(x,y,z)$ um campo escalar. Mostre que

$$div(\phi\vec{V}) = \phi\, div\vec{V} + \vec{\nabla}\phi\,.\vec{V}$$

4.(Exercício) Utilize essa fórmula para calcular

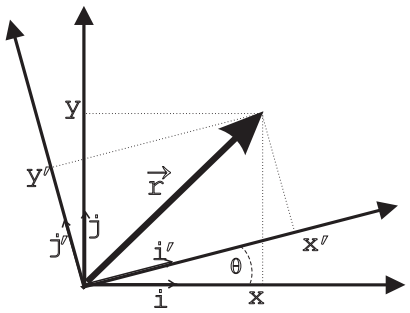
$$div\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

onde $r \equiv |\vec{r}|$. (Resp: $\frac{2}{r}$).

2.2 Rotações

Para entender por que certas combinações de derivadas, como o divergente de um vetor, e o laplaceano de um escalar, são importantes, é conveniente estudar um pouco o que acontece com um vetor, e quantidades relacionadas a ele, quando se executa uma rotação no sistema de eixos, passando de um triedro ortogonal a outro. Na natureza não existem eixos, de maneira que qualquer base que se utilize na descrição de quantidades físicas, só pode ter um papel auxiliar, assim como o andaime auxilia na construção de um prédio, mas é desnecessário para descrever as propriedades do prédio. Deve-se, por isso, esperar que as quantidades de real significado físico independam da escolha de eixo de coordenadas, ou dependam dela de uma maneira muito simples. Vamos iniciar por rotações muito simples: rotações planas.

A figura abaixo mostra um sistema de eixos no plano, formada por eixos nas direções dos vetores unitários $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$, ortogonais. O vetor $\vec{r}$ tem, nesses eixos, as componentes x e y, exibidas na figura. Passamos agora dos eixos iniciais para um novo sistema, girado em relação ao primeiro de um ângulo θ. Os novos eixos são nas direções dadas pelos vetores $\vec{\imath}'$ e $\vec{\jmath}'$, e são também ortogonais. As componentes de $\vec{r}$ em relação aos novos eixos são x' e y', mostradas na figura.



Vamos estabelecer as relações entre as componentes do vetor $\vec{r}$ no primeiro e no segundo sistemas de eixo. Elas são comumente chamadas de *fórmulas de transformação das componentes de um vetor*.

Embora seja possível obter essas fórmulas diretamente da figura, vamos dar aqui uma dedução algébrica detalhada. O vetor $\vec{r}$ pode ser expandido na base formada pelos vetores $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$, dando

$$\vec{r} = (\vec{r}.\vec{\imath})\vec{\imath} + (\vec{r}.\vec{\jmath})\vec{\jmath} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}\,. \tag{11}$$

Pode também ser expandido na base formada por $\vec{\imath}'$ e $\vec{\jmath}'$, dando

$$\vec{r} = (\vec{r}.\vec{\imath}')\vec{\imath}' + (\vec{r}.\vec{\jmath}')\vec{\jmath}' = x'\vec{\imath}' + y'\vec{\jmath}' \tag{12}$$

Por outro lado, os vetores $\vec{\imath}$ e $\vec{\jmath}$ podem ser expandidos na base formada por $\vec{\imath}'$ e $\vec{\jmath}'$, obtendo-se

$$\begin{aligned} \vec{\imath} &= (\vec{\imath}\,.\vec{\imath}\,')\,\vec{\imath}\,' + (\vec{\imath}\,.\vec{\jmath}\,')\,\vec{\jmath}\,' \\ &= \cos\theta\,\vec{\imath}\,' - \sin\theta\,\vec{\jmath}\,' \qquad (13) \\ \vec{\jmath} &= (\vec{\jmath}\,.\vec{\imath}\,')\,\vec{\imath}\,' + (\vec{\jmath}\,.\vec{\jmath}\,')\,\vec{\jmath}\,' \\ &= \sin\theta\,\vec{\imath}\,' + \cos\theta\,\vec{\jmath}\,' \qquad (14) \end{aligned}$$

Usando estes resultados em (11) temos, com (12), duas expressões para $\vec{r}$ na base $(\vec{\imath}\,', \vec{\jmath}\,')$. Igualando os coeficientes, obtemos

$$x' = \cos\theta\; x + \sin\theta\; y \qquad (15)$$
$$y' = -\sin\theta\; x + \cos\theta\; y \qquad (16)$$

Note-se que $\vec{r}$ é um vetor que não tem nada de especial. Por isso, seja $\vec{V}$ um vetor qualquer, e sejam $(V_x,\ V_y)$ suas componentes na base $(\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ e $(V_x',\ V_y')$ suas componentes na base $(\vec{\imath}\,',\ \vec{\jmath}\,')$. Temos

$$V_x' = \cos\theta\; V_x - \sin\theta V_y \qquad (17)$$
$$V_y' = \sin\theta\; V_x + \cos\theta\; V_y \qquad (18)$$

As rotações têm uma propriedade especial que simplifica muito seu estudo: são transformações contínuas. Isto quer dizer que uma rotação de um ângulo θ finito, pode ser realizada por uma sucessão de um número enorme de rotações muito pequenas, até mesmo infinitesimais. Muitas vezes, para provar uma determinada propriedade das rotações, é suficiente prová-la, então, para rotações infinitesimais. Vamos usar esta técnica primeiro para o caso que já estudamos, rotações no plano. Depois, vamos, utilizando de novo esta técnica, passar ao estudo das rotações infinitesimais em três dimensões.

Na eq.(15), tomemos o caso em que θ é muito pequeno. Neste caso, $\cos\theta \approx 1$, e $\sin\theta \approx \theta$, de maneira que se obtém

$$x' = x - \theta\; y \qquad (19)$$
$$y' = \theta\; x + y \qquad (20)$$

Estas são as propriedades de transformação do vetor $\vec{r}$ sob uma *rotação infinitesimal*.

2.2.1 Rotações no plano e números complexos

A reconstrução de (15) a partir de (19) não é simples, usando os métodos mais imediatos. Por isso, vamos, nesta digressão sobre números complexos, introduzir uma técnica que torna essa tarefa bastante simples.

Todo número complexo $z = x + iy$ pode ser escrito na *representação polar*:

$$z = r\ e^{i\phi}\ , \tag{21}$$

e a relação entre as duas representações segue facilmente do uso da famosa fórmula de Gauss:

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi\ : \tag{22}$$

$$x + iy = z = re^{i\phi} = r\cos\phi = ir\sin\phi \tag{23}$$

Executando uma rotação de ângulo $-\theta$ (equivalente a rodar os eixos de ângulo θ), temos:

$$\begin{aligned} x' + iy' &= re^{i(\phi-\theta)} && (24)\\ &= r(\cos(\phi-\theta) + i\sin(\phi-\theta)) && (25)\\ &= r(\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta) + ir(\sin\theta\cos\phi - \cos\phi\sin\theta) && (26)\\ &= x\cos\theta + y\sin\theta + y\cos\theta + i(y\cos\theta - x\sin\theta) && (27) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x' &= \cos\theta\ x + \sin\theta\ y && (28)\\ y' &= -\sin\theta\ x + \cos\theta\ y && (29) \end{aligned}$$

que reproduz a eq.(15).

Considere agora uma rotação infinitesimal, de ângulo $-\frac{\theta}{n}$, onde n é um inteiro muito grande. Temos:

$$\begin{aligned} x' = re^{i\left(\phi-\frac{\theta}{n}\right)} &= re^{i\phi}e^{-i\frac{\theta}{n}} \approx re^{i\phi}\left(1 - i\frac{\theta}{n}\right)\\ &= (r\cos\phi = ir\sin\phi)\left(1 - i\frac{\theta}{n}\right)\\ &= x + \frac{\theta}{n}y + i\left(-\frac{\theta}{n}\ x + y\right) && (30) \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{\theta}{n}\ y && (31)\\ y' &= -\frac{\theta}{n}\ x + y && (32) \end{aligned}$$

Então, se realizarmos duas rotações sucessivas de ângulo $-\frac{\theta}{n}$, teremos

$$x' + iy' = re^{i\phi}\left(1 - i\frac{\theta}{n}\right)^2 \tag{33}$$

e, se forem n sucessivas,

$$x' + iy' = re^{i\phi}\left(1 - i\frac{\theta}{n}\right)^n \tag{34}$$

Como é sabido,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - i\frac{\theta}{n}\right)^n = e^{-i\theta} \tag{35}$$

Logo, no limite de infinitas rotações infinitesimais, temos

$$x' + iy' = \lim_{n\to\infty} re^{i\phi}\left(1 - i\frac{\theta}{n}\right)^n = re^{i\phi}e^{-i\theta} \tag{36}$$

ou seja, neste limite,

$$x' = \cos\theta\, x + \sin\theta\, y \tag{37}$$
$$y' = -\sin\theta\, x + \cos\theta\, y \tag{38}$$

e assim reconstruímos uma rotação finita por uma sucessão de rotações infinitesimais.

A eficácia do uso de números complexos na descrição de rotações no plano levou William Rowan Hamilton[2] a procurar uma possível generalização dos números complexos que fizesse o mesmo para rotações no espaço. Daí nasceram os *quaternions*.

2.2.2 Rotações infinitesimais: parametrização

Para sintetizar as fórmulas de transformação (19), introduzimos a notação indicial, onde $(x_1, x_2) = (x, y)$:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{2}(\delta_{ij} + \omega_{ij})x_j \tag{39}$$

para $i = 1, 2$, onde δ_{ij} é definido assim

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{quando} \quad i = j \\ 0 & \text{quando} \quad i \neq j \end{cases} \tag{40}$$

Expandindo (39), temos

$$x'_1 = (1 + \omega_{11})x_1 + \omega_{12}x_2 \tag{41}$$
$$x'_2 = \omega_{21}x_1 + (1 + \omega_{22})x_2 \tag{42}$$

Comparando com (19), vemos que devemos ter

$$\omega_{11} = 0 \tag{43}$$
$$\omega_{22} = 0 \tag{44}$$
$$\omega_{12} = -\theta \tag{45}$$
$$\omega_{21} = \theta \tag{46}$$

[2]Grande matemático e físico irlandês do século XIX, interessa aos físicos sobretudo por suas contribuições à mecânica: o formalismo canônico, ou hamiltoniano, o princípio de mínima ação (ou princípio de Hamilton) e a equação de Hamilton-Jacobi. No curso de mecânica quântica seu nome será um dos mais pronunciados, porque se utiliza, ali, o formalismo canônico.

Isto pode ser sintetizado assim: ω_{ij} é antissimétrico ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$) e infinitesimal.

Na realidade, poderíamos chegar a esta conclusão de uma forma mais geral e rápida: uma rotação é uma transformação tal que o módulo do vetor girado permanece invariante. Ou seja,

$$\sum_i x_i x_i = \sum_j x'_j x'_j \tag{47}$$

pois $|\vec{r}|^2 = \sum_i x_i x_i = \sum_j x'_j x'_j$ Usando agora a equação (39), vamos eliminar os x'_j da (47). Escrevemos

$$x'_j = \sum_l (\delta_{jl} + \omega_{jl}) x_l$$

para um fator, e

$$x'_j = \sum_m (\delta_{jm} + \omega_{jm}) x_m$$

para o outro. A eq.(47) se transforma em

$$\sum_i x_i x_i = \sum_j \left\{ \left(\sum_l (\delta_{jl} + \omega_{jl}) x_l \right) \left(\sum_m (\delta_{jm} + \omega_{jm}) x_m \right) \right\} \tag{48}$$

Como essas somas são associativas, podemos escrever

$$\sum_i x_i x_i = \sum_j \sum_l \sum_m \left\{ (\delta_{jl} + \omega_{jl}) x_l (\delta_{jm} + \omega_{jm}) x_m \right\} \tag{49}$$

O termo dentro das somatórias do segundo membro, expandido, dá

$$\delta_{jl}\delta_{jm}x_l x_m + \delta_{jl}x_l\omega_{jm}x_m + \omega_{jl}x_l\delta_{jm}x_m + \omega_{jl}x_l\omega_{jm}x_m \tag{50}$$

mas o último termo, que contém o produto de dois ω, é desprezível, pois ω é infinitesimal. Restam, então,

$$\delta_{jl}\delta_{jm}x_l x_m + \delta_{jl}x_l\omega_{jm}x_m + \omega_{jl}x_l\delta_{jm}x_m \tag{51}$$

Vamos calcular termo a termo.

$$\sum_j \sum_l \sum_m (\delta_{jl}\delta_{jm}x_l x_m) = \sum_j \left(\sum_l \delta_{jl}x_l \right) \left(\sum_m \delta_{jm}x_m \right) \tag{52}$$

Mas $\sum_l \delta_{lj}x_l = x_j$, e $\sum_m \delta_{mj}x_m = x_j$, logo,

$$\sum_j \sum_l \sum_m (\delta_{jl}\delta_{jm}x_l x_m) = \sum_j x_j x_j \tag{53}$$

$$\sum_j \sum_l \sum_m (\delta_{jl} x_l \omega_{jm} x_m) = \sum_j \left(\sum_l \delta_{jl} x_l \right) \left(\sum_m \omega_{jm} x_m \right) = \sum_j \sum_m \omega_{jm} x_j x_m \tag{54}$$

enquanto que o terceiro termo dá, por motivos análogos,

$$\sum_j \sum_l \sum_m (\omega_{jl} x_l \delta_{jm} x_m) = \sum_j \sum_l \omega_{jl} x_j x_l \tag{55}$$

Note-se que a útima soma desta equação pode também ser escrita

$$\sum_j \sum_m \omega_{jm} x_j x_m \tag{56}$$

pois o nome do índice da soma pode ser qualquer um. Então, reunindo tudo, temos

$$\sum_i x_i x_i = \sum_j x_j x_j + 2 \sum_j \sum_m \omega_{jm} x_j x_m \tag{57}$$

Como

$$\sum_i x_i x_i = \sum_j x_j x_j \tag{58}$$

temos que

$$\sum_j \sum_m \omega_{jm} x_j x_m = 0 \tag{59}$$

Qual é a forma mais geral de ω_{jm} para a qual esta soma é zero, com x_j e x_m arbitrários? A resposta é que ω_{jm} deve ser antissimétrico, ou seja, $\omega_{jm} = -\omega_{mj}$. De fato,

$$\sum_j \sum_m \omega_{jm} x_j x_m = \sum_m \sum_j \omega_{mj} x_m x_j \tag{60}$$

pois a única coisa que fizemos foi inverter os nomes dos dois índices. Mas a segunda soma pode também se rescrita

$$\sum_m \sum_j \omega_{mj} x_l x_m \tag{61}$$

pois os x_i são números. Mas então, podemos reescrever (60) assim:

$$\sum_j \sum_m \omega_{jm} x_j x_m = \sum_m \sum_j \omega_{mj} x_j x_m \tag{62}$$

e, como a ordem das somas é irrelevante, temos

$$\sum_j \sum_m \omega_{jm} x_j x_m = \sum_j \sum_m \omega_{mj} x_j x_m \tag{63}$$

Se $\omega_{jm} = -\omega_{mj}$, teremos

$$\sum_j \sum_m \omega_{jm} x_j x_m = -\sum_j \sum_m \omega_{jm} x_j x_m \tag{64}$$

ou o que é o mesmo,

$$\sum_j \sum_m \omega_{jm} x_j x_m = 0 \tag{65}$$

como se queria demonstrar.

Resumindo, seja a transformação infinitesimal

$$x'_i = \sum_j (\delta_{ij} + \omega_{ij}) x^j \tag{66}$$

seja uma rotação, é necessário e suficiente[3] que

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \tag{67}$$

2.2.3 Rotações em 3 dimensões

Uma rotação infinitesimal em três dimensões é definida como uma transformação linear

$$x'_i = \sum_j (\delta_{ij} + \omega_{ij}) x^j \text{ com } i, j = 1, 2, 3. \tag{68}$$

tal que

$$\sum_i x'_i x'_i = \sum_j x_j x_j \tag{69}$$

Também neste caso a condição necessária e suficiente para que (68) seja uma rotação é que

$$\omega_{ij} = -\omega_{ji} \tag{70}$$

e o bonito é que a demonstração é exatamente a mesma! Podem-se usar, passo a passo, as mesmas equações que no caso de duas dimensões. Melhor, a demostração continua válida para um número qualquer de dimensões! A única coisa que muda é o número de valores que os íindices assumem, mas este número não desempenhou qualquer papel da demonstração.

[3] Na realidade só demonstramos a suficiência; a demonstração da necessidade é muito simples, e fica a encargo do leitor.

Para resumir: quando se realiza, sobre o sistema de eixos, uma rotação infinitesimal, caracterizada pelos parâmetros infinitesimais $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, as coordenadas de um ponto fixo do espaço se transformam assim:

$$x_i' = x_i + \sum_j \omega_{ij} x_j \tag{71}$$

As componentes de um vetor fixo do espaço, sob esta mesma rotação, transformam-se assim:

$$V_i' = V_i + \sum_j \omega_{ij} V_j \tag{72}$$

Exercício: mostrar que o produto escalar de dois vetores é invariante sob rotações:

$$\begin{aligned}
\vec{V}.\vec{W} &= \sum_i V_i' W_i' && (73)\\
&= \sum_i \left(V_i + \sum_j \omega_{ij} V_j \right) \left(W_i + \sum_k \omega_{ik} W_k \right) && (74)\\
&= \sum_i V_i W_i + \sum_i \sum_j \omega_{ij} W_i V_j + \sum_i \sum_k \omega_{ik} V_i W_k && (75)\\
&= \sum_i V_i W_i + \sum_i \sum_j (\omega_{ij} + \omega_{ji}) W_i V_j && (76)\\
&= \sum_i V_i W_i && (77)
\end{aligned}$$

Exercício: dada a transformação infinitesimal

$$x' = x_i + \sum_j \omega_{ij} x_j \tag{78}$$

determinar a transformação inversa.
A inversa é

$$x_i = x_i' - \sum_j \omega_{ij} x_j' \tag{79}$$

A verificação é imediata.

Exercício: determinar a transformação nas derivadas parciais das coordenadas, por uma rotação infinitesimal.
Pela regra da cadeia, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_i'} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{80}$$

Como

$$x_j = x_j' - \omega_{ji} x_i' \tag{81}$$

temos

$$\frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \delta_{ij} - \omega_{ji}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = (\delta_{ij} - \omega_{ji})\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} - \omega_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{82}$$

É conveniente lembrar aqui a fórmula de transformação de um vetor, sob rotações infinitesimais:

$$A'_i = A_i + \omega_{ij}A_j \tag{83}$$

Vamos agora achar a fórmula de transformação da seguinte quantidade:

$$\sum_i \frac{\partial A'_i}{\partial x'_i}$$

A expressão acima não é outra coisa que o divergente de $\vec{A}$ calculado no referencial em que as coordenadas são x'_i. Ora,

$$\begin{aligned}
\sum_i \frac{\partial A'_i}{\partial x'_i} &= \sum_{i,j,l}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - \omega_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(A_i + \omega_{il}A_l) \\
&= \sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_i} - \omega_{ji}\frac{\partial A_i}{\partial x_i} + \omega_{il}\frac{\partial A_l}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - \sum_{ij}\omega_{ji}\frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \sum_{ij}\omega_{ji}\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \\
&= \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i}
\end{aligned} \tag{84}$$

onde, dentro das regras de tratamento de transformações infinitesimais, desprezamos termos onde ω aparecia ao quadrado.

A eq.(84) relata um fato muito importante: o divergente de um campo vetorial é um invariante: aquela particular combinação de componentes do campo e de derivadas parciais que o definem num sistema, definem-no em qualquer sistema, e o valor da expressão é o mesmo. Ou seja, o divergente de um campo vetorial não depende do sistema de coordenadas utilizado. Pelos nossos argumentos anteriores, temos o direito de esperar que o divergente de um campo vetorial seja uma quantidade física importante.[4].

[4]Há uma razão ainda mais forte. Para os valentes, ela está explicada no apêndice, que está escrito num nível bem mais avançado do que a parte principal deste texto. Trata-se do teorema de Helmholtz. Uma exposição mais elementar dele será feita mais abaixo

2.2.4 Adeus às somatórias

Considere a expressão

$$\sum_j A_{ij} x_j$$

que indica uma soma sobre todos os valores do índice j. Note que o índice sobre o qual se soma, j, vem repetido, na expressão. Isto sempre acontece, quando ocorre uma somatória. Examine o leitor a profusão de somas que foram escritas acima: achará sempre este fato: quando há uma soma sobre um certo índice, ele aparece repetido na expressão dentro da somatória. Mas então podemos fazer uma notável economia na notação simplesmente deixando de escrever o sinal de somatória! (Quem notou isto foi Einstein!). Por exemplo,

$$\sum_j A_{ij} x_j \equiv A_{ij} x_j$$

na notação que passaremos a usar doravante, chamada *convenção de Einstein.*
Exemplos:

$$\sum_i \sum_j A_{ij} B_{ij} \equiv A_{ij} B_{ij}$$

$$\sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k \equiv \epsilon_{ijk} x_i y_j z_k$$

O leitor atento estará se perguntando: e se eu quiser simplesmente escrever, por exemplo, $x_i x_i$ como um símbolo que tem, para $i = 1$, o valor $x_1 x_1$, para $i = 2$ o valor $x_2 x_2$, etc, ou seja, quero expressar um termo da soma, e não a soma? Neste caso, que é comparativamente raro, convencionamos escrever

$$x_i x_i \qquad \text{(sem soma)}$$

2.3 Exercícios

Prove que:
(1) $\delta_{ij} x_j = x_i$
(2) $\delta_{ij} \delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$
(3) Seja $\vec{e}_i$ o vetor unitário ao longo do eixo i, de modo que $\vec{r} = x_i \vec{e}_i$. Mostre que:

(a)$\vec{r}.\vec{r} = x_i x_i = x^2 + y^2 + z^2$
(b) Sejam $\vec{v}$ um vetor de componentes v_i e $\vec{w}$ um vetor de componentes w_i. Então, $\vec{v}.\vec{w} = v_i w_i$.
(c)Considere a função x_i, que a cada ponto associa o valor da i-ésima coordenada do ponto, e seja x_j a função análoga em relação à coordenada x_j. Então,

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

(4) Seja ϵ_{ijk} definido assim:

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{312} = \epsilon_{231} = 1$$

$$\epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1$$

todos os outros valores sendo nulos. ϵ_{ijk} é, portanto, antissimétrico em todos os índices. Mostre que:
(a)$\epsilon_{ijk} x_i x_j = 0$
(b)$\epsilon_{ijk}\delta_{jk} = 0$
(c)Considere a matriz 3x3 de elementos a_{ij}, e seja a o determinante dessa matriz. Então,

$$\epsilon_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k} = a$$

2.4 O rotacional

A partir do operador diferencial $\vec{\nabla}$ obtivemos o gradiente de um campo escalar, $\vec{\nabla} f$, e o divergente de um campo vetorial, $\vec{\nabla}.\vec{V}$. Uma terceira operação possível é a seguinte: seja $\vec{V}(x,y,z) = V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_k\vec{k}$ um campo vetorial. O operador diferencial *nabla* é

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Logo, pode-se pensar em definir $\vec{\nabla} \times \vec{V}$, o produto vetorial de $\vec{\nabla}$ pelo campo vetorial $\vec{V}$. Temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\left(V_x\vec{\imath} + V_y\vec{\jmath} + V_z\vec{k}\right) \quad (85)$$

$$= \frac{\partial V_y}{\partial x}\vec{\imath}\times\vec{\jmath} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\vec{\imath}\times\vec{k} + \frac{\partial V_x}{\partial y}\vec{\jmath}\times\vec{\imath}$$

$$+ \frac{\partial V_z}{\partial y}\vec{\jmath}\times\vec{k} + \frac{\partial V_x}{\partial z}\vec{k}\times\vec{\imath} + \frac{\partial V_y}{\partial z}\vec{k}\times\vec{\jmath} \quad (86)$$

que dá, realizando os produtos vetoriais e simplificando,

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{\imath} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{\jmath} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k} \qquad (87)$$

$\vec{\nabla} \times \vec{V}$ denomina-se o *rotacional* do campo vetorial $\vec{V}$, e é, também ele, um campo vetorial.

Como regra mnemônica costuma-se usar

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} \qquad (88)$$

Este determinante simbólico[5] deve ser expandido, à maneira de Laplace, em relação à primeira linha. Desta forma reproduz-se (87).

O leitor tem todo o direito de estar curioso. Que bichos são esses? Quando é que um campo tem divergente zero? Quando é que tem rotacional zero? Quando é que não tem? Por que todas essas definições?

Mais tarde, quando tivermos à disposição os teoremas integrais de Gauss-Ostrogradskii e Stokes, poderemos mostrar com simplicidade o campo vetorial típico com divergente zero e aquele com rotacional zero. Os nomes desses operadores encontrarão também uma justificativa. Neste meio tempo vamos apresentando alguns resultados parciais.

Exemplos:
(1) Um campo vetorial *uniforme* tem tanto o divergente quanto o rotacional iguais a zero, pois as derivadas parciais de todas as componentes são nulas.
(2) Considere o campo vetorial definido assim: seja P o ponto de coordenadas (x, y, z). Toma-se o vetor que parte da origem até o ponto P, e se o transporta, sempre paralelo a si mesmo, até que sua origem seja o ponto P. Chamaremos este campo vetorial simplesmente de $\vec{r}$. Note que o vetor associado à origem é o vetor $\vec{0}$. Este campo tem divergente não-nulo. De fato, $\vec{\nabla}.\vec{r} = 3$. Os vetores "divergem" a partir da origem. O rotacional deste campo é zero, como é imediato verificar.
(3) Considere um disco rígido no plano xy girando, com velocidade angular constante, em torno do eixo z que passa pelo seu centro. Em cada ponto do disco, seja $\vec{v}$ o vetor velocidade do ponto. Obtém-se assim um campo de vetores que são tangentes a círculos de centro na origem e que estão todos no plano xy. Conseqüentemente, $v_z = 0$ em todos os pontos. Seja $\vec{\omega}$ um vetor ao longo do eixo z cujo módulo é igual à velocidade angular ω do disco, e

[5] É simbólico porque seus elementos não são, todos, números

cujo sentido é o sentido positivo do eixo, se a rotação for anti-horária. Então o campo vetorial pode ser descrito de uma forma simples:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \tag{89}$$

Como $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$ e $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$,

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega x\vec{\jmath} - \omega y\vec{\imath} \tag{90}$$

O cálculo do rotacional dá:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 2\omega\vec{k} = 2\omega\vec{k} \tag{91}$$

O leitor não terá dificuldades em mostrar que, por outro lado, $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$. O campo de vetores "roda", e o seu "rotacional" é diferente de zero. O rotacional foi introduzido pelo grande físico e médico Hermann von Helmholtz para descrever turbilhões em fluidos, como os tornados na atmosfera. Para uma descrição mais completa de seus grandes trabalhos, veja ([15]).
(4) Considere agora um disco de poeira cósmica girando em torno de uma estrela, supondo, por simplicidade, órbitas circulares. Cada grão de poeira é um planeta, e se move segundo as leis de Kepler. A que nos interessa é a terceira, que é obtida impondo que a força de atração gravitacional coincida com a força centrípeta.

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \tag{92}$$

ou

$$v^2 = \frac{GM}{r} \tag{93}$$

(aqui, naturalmente, G é a constante de gravitação universal, e M é a massa da estrela). No exemplo anterior vimos que um vetor tangente a um círculo no plano xy tem a forma $k(-y\vec{\imath} + x\vec{\jmath})$. Portanto, podemos afirmar que a velocidade do grão de pó que está numa órbita circular de raio r é

$$\vec{v} = k(-y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}) \tag{94}$$

com k tal que

$$v^2 = \frac{GM}{r} \tag{95}$$

Isto determina completamente o campo de velocidades, que é dado por

$$v_x = -\sqrt{GM}\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}} \tag{96}$$

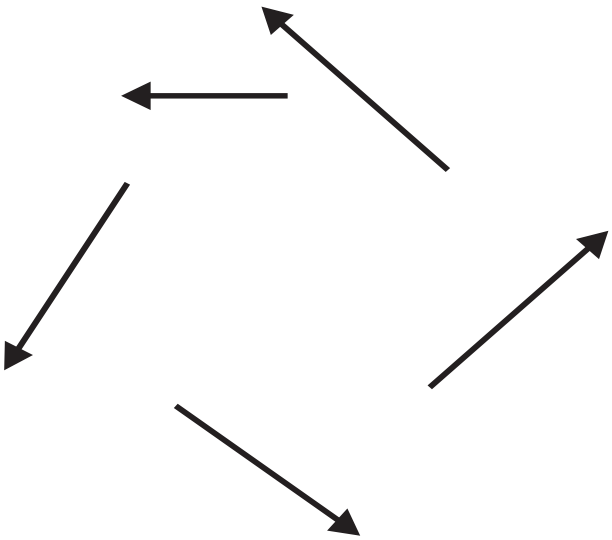
$$v_y = \sqrt{GM}\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{4}}} \tag{97}$$

O cálculo do rotacional dá (bom exercício!)

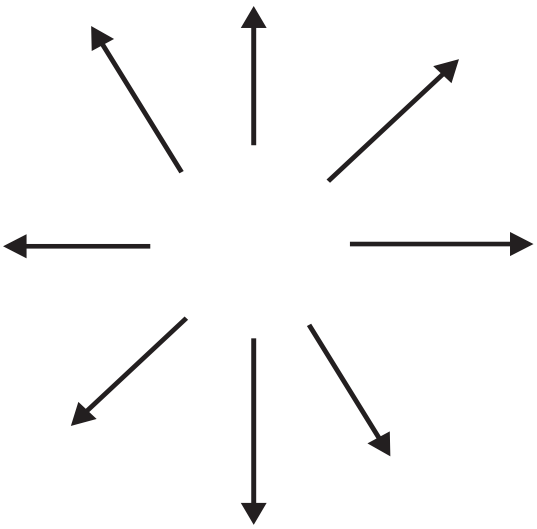
$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \sqrt{GM} \frac{1}{2r^{\frac{3}{2}}} \vec{k} \tag{98}$$

É também um bom exercício mostrar que o divergente deste campo de velocidades também é zero.

As figuras abaixo exibem campos típicos com rotacional não-nulo e com divergente não-nulo.



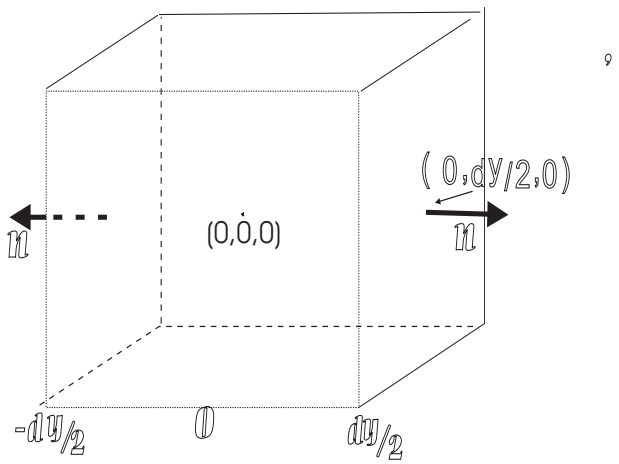
Rotacional diferente de zero



Campo com divergente diferente de zero

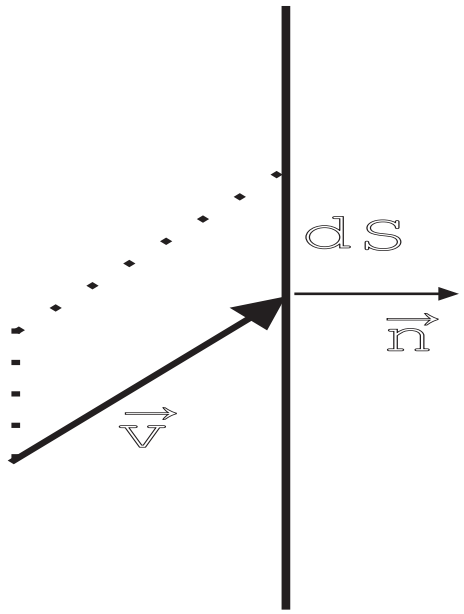
3 O teorema do divergente

O teorema do divergente, ou de *Gauss*, é o instrumento matemático que melhor permite visualizar que tipos de campos vetoriais possuem divergente não-nulo. Vamos enunciá-lo num contexto concreto. O problema é o seguinte: a figura abaixo representa uma região cúbica do espaço por onde flui uma corrente de água. Trata-se de um cubo geométrico, sem existência física: uma porção do espaço. Queremos calcular quanta água sai do cubo num intervalo de tempo δt, ou, mais precisamente, a diferença entre a quantidade de água que sai e a que entra. Naturalmente, supõe-se que a única maneira de a água sair do cubo, ou entrar nele, é atravessando uma de suas faces.



Os eixos coordenados são escolhidos de maneira que sejam perpendiculares às faces. O centro do cubo é o ponto de coordenadas $(0, 0, 0)$. Assim, os vetores $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$,$\vec{k}$, são vetores unitários normais, cada um a um par de faces. Tomemos, em cada face, a normal *externa*. Então, por exemplo, na face em $dy/2$, a normal externa $\vec{n}$ será $\vec{\jmath}$, ao passo que, na face em $-dy/2$, $\vec{n}$ será $-\vec{\jmath}$.

Suponhamos que as faces do cubo sejam suficientemente pequenas para que o valor da velocidade da água nos vários pontos de uma face possam ser considerados iguais. (Se não for, diminua-se o cubo!). Na figura abaixo vemos como calcular a quantidade de água que atravessa uma face, no tempo δt.



A quantidade

$$\vec{v}.\vec{n}dS \tag{99}$$

é o volume da região tracejada. Na unidade de tempo, toda a água que estiver aí dentro atravessará dS, e nenhuma outra. Então, se dS for a superfície de uma face do cubo e $\vec{n}$ for a normal externa. no intervalo de tempo δt, um volume de água dado por

$$\vec{v}.\vec{n}dS\delta t \tag{100}$$

atravessará essa face. Consideremos a face localizada em $dy/2$. O volume de água que atravessará a face é

$$\vec{v}(0,\frac{dy}{2},0).\vec{\jmath}dS\delta t = v_y(0,\frac{dy}{2},0)dS\delta t. \tag{101}$$

Como $dS = dxdz$, isto é igual a

$$v_y(0,\frac{dy}{2},0)dxdz\delta t \tag{102}$$

Usando a fórmula dos acréscimos finitos

$$v_y(0,\frac{dy}{2},0) = v_y(0,0,0) + \frac{dy}{2}\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

de modo que (102) pode ser escrita

$$v_y(0,\frac{dy}{2},0)dxdz\delta t = \left(v_y(0,0,0) + \frac{dy}{2}\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)dxdz\delta t\ . \tag{103}$$

A face oposta contribui com

$$\left(-v_y(0,0,0) + \frac{dy}{2}\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) dxdz\delta t \ . \tag{104}$$

de modo que a soma das duas é

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} dxdydz\delta t \ . \tag{105}$$

Cada par de faces tem uma contribuição análoga. Somando tudo, temos

$$\text{Volume que sai} \ = \ \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dxdydz\delta t \tag{106}$$

Podemos então escrever que, por unidade de tempo,

$$\text{fluxo total de } \vec{v} \text{ nas faces} \ = \vec{\nabla}.\vec{v} \ \times \ \text{Volume do cubo} \tag{107}$$

Esta é a essência do teorema do divergente. Para um volume delimitado por uma superfície fechada arbitrária, tomando-se em cada ponto da superfície a normal externa, temos

$$\int \vec{v}.\vec{n}dS = \int \vec{\nabla}.\vec{v}dV \tag{108}$$

Chega-se a este resultado "reconstruíndo" o volume (de forma arbitrária), com cubinhos, como se fossem peças de um Lego. Para cada cubinho vale o teorema, portanto vale para a soma. Note-se que a superfície na qual se calcula o fluxo é a superfície externa, pois cada superfície interna de um cubinho pertence a dois cubinhos, e a contribuição de uma ao fluxo cancela a da outra, já as normais têm sentido oposto.

Note-se que, tendo-se usado, da água, só a propriedade de que suas velocidades formam um campo vetorial diferenciável, o teorema é, na realidade, válido para quaisquer campos vetoriais diferenciáveis. Vamos fazer uso amplo dele para os campos elétrico e magnético, por exemplo.

3.1 O teorema de Helmholtz

À medida que formos nos aprofundando no eletromagnetismo não poderemos deixar de notar a freqüência com que os operadoes diferenciais *div* e *rot* aparecerão nas nossas equações.

O teorema de Helmholtz que descreveremos a seguir explica este fato. Por enquanto não daremos uma demonstração dele. Na última parte destas notas um tratamento detalhado (mas talvez um pouco avançado demais para

o terceiro semestre) deste e de outro teorema famoso de Helmholtz, porá a casa em ordem. Por enquanto queremos *entender* o teorema. Provar é outra coisa.[6]

Seja $\vec{v}(x, y, z)$ um campo vetorial que se anula no infinito. O teorema de Helmholtz diz que este campo está completamente determinado se conhecermos, em todos os pontos, as funções $\vec{\nabla}.\vec{v}$ e $\vec{\nabla} \times \vec{v}$. Mais precisamente, sejam $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dois campos vetoriais que se anulam no infinito. Então, se

$$\vec{\nabla}.\vec{v} = \vec{\nabla}.\vec{w} \tag{109}$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{w} \, , \tag{110}$$

segue que $\vec{v} = \vec{w}$.
Exemplos:
(1)O exemplo mais trivial. Consideremos um campo vetorial $\vec{v}$ que se anula no infinito e seja tal que $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$. Ora, o campo $\vec{v} = 0$ em todos os pontos se anula no infinito (!) e tem rotacional e divergente nulos. Portanto, pelo teorema de é o único que satisfaz a essas condições. Note-se que a condição de se anular no infinito é essencial. De fato, um campo uniforme, isto é, $\vec{v} = \vec{K}$, onde $\vec{K}$ é um vetor constante, tem também divergente e rotacional nulos. Logo, abrindo mão da condição de se anular no infinito, existem infinitos campos com divergente e rotacional nulos.
(2) Considere o campo vetorial $\vec{E} = \frac{\vec{r}}{r^3}$, que é o campo elétrico de uma carga puntiforme de valor 1 colocada na origem. Temos, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Logo, $\vec{\nabla}.\vec{E}$ não pode ser zero. No entanto, se calcularmos, sem pensar muito, esse divergente, *acharemos o valor zero!*. Vejam:

[6]Exceto para os matemáticos, para os quais entender *é* provar.

$$
\begin{aligned}
div\vec{E} = div\frac{\vec{r}}{r^3} &= \frac{1}{r^3} div\vec{r} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r^3}\right).\vec{r} \\
&= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\vec{\nabla} r.\vec{r} \\
&= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4}\frac{\vec{r}}{r}.\vec{r} \\
&= \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} = 0 \qquad (111)
\end{aligned}
$$

Onde está o erro? A função $\frac{\vec{r}}{r^3}$ não é contínua, e muito menos diferenciável, no ponto $r = 0$. Então o resultado do nosso cálculo só vale para $r \neq 0$. E, de fato, veremos depois que, usando métodos indiretos, podemos atribuir um valor (não nulo) ao divergente deste campo na origem.
(3) Considere uma distribuição conínua de cargas, constante no tempo, e que não se estende ao infinito. Neste caso, logo no início do curso veremos que o rotacional do campo elétrico é zero em todos os pontos, e que o divergente desse campo é proporcional à densidade de carga elétrica.

4 Cálculo vetorial *for the practical man*

4.1 Introdução

Estas notas de cálculo vetorial foram feitas no espírito das notas que Feynman fazia para si mesmo, quando jovem, e que intitulava *. . . for the practical man.* Escreveu, por exemplo, *Calculus for the practical man*, que pretendia conter aquilo, do Cálculo Diferencial e Integral, que *servia* para o uso quotidiano do homem *prático*, ou seja, que queria ver as coisas feitas. O Feynman era o Feynman, e eu sou eu, mas, paciência: espero que sejam úteis para quem, ainda que momentaneamente, precisa do cálculo vetorial para fins práticos: fazer uma conta!

Não procure aqui profundidade, ou demonstrações novas (ou velhas!): oferecemos aqui um algoritmo que tornará o cálculo de expressões que envolvam *div*, *rot*, etc, uma trivialidade. Na última seção eu comento como se faz cálculo vetorial quando o objetivo não é só calcular.

4.2 Notação e preliminares

Um vetor será sempre representado por suas componentes cartesianas. O vetor $\vec{V}$, de componentes V_i, será apresentado assim:"o vetor V_i", sem maiores

comentários. As seguintes relações são óbvias:

$$(\vec{V}+\vec{W})_i = V_i + W_i \tag{112}$$

$$(\alpha\vec{V})_i = \alpha V_i \tag{113}$$

onde α é um número. Note que o índice i pode assumir os valores 1,2 e 3. Todos os índices que aparecerão aqui assumirão esses valores.

O produto escalar de dois vetores $\vec{V}$ e $\vec{W}$, denotado por $\vec{V}.\vec{W}$ é escrito

$$\vec{V}.\vec{W} = \sum_{i=1}^{3} V_i W_i \tag{114}$$

No entanto, o símbolo de soma, $\sum$, é redundante. Vamos eliminá-lo, escrevendo o produto escalar assim:

$$\vec{V}.\vec{W} = V_i W_i \tag{115}$$

A regra é que, quando os índices são repetidos (como o i nessa expressão) é sempre feita uma soma para o índice indo de 1 até 3.

Exemplos:

(1)

$$\sum_{i=1}^{3} V_i V_i \equiv V_i V_i = V_1V_1 + V_2V_2 + V_3V_3 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = |\vec{V}|^2 \tag{116}$$

(2)

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} V_i W_i U_j M_j = V_i W_i U_j M_j = (V_1W_1+V_2W_2+V_3W_3)(U_1M_1+U_2M_2+U_3M_3) \tag{117}$$

$$= (\vec{V}.\vec{W})(\vec{U}.\vec{M}) \tag{118}$$

(3) O símbolo δ_{ij}, denominado *delta de Kronecker* é definido assim:$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$. Para todas as outras possibilidades, $\delta_{ij} = 0$. Assim, $\delta_{12} = 0$. Considere a soma

$$\delta_{ij}V_j = \delta_{i1}V_1 + \delta_{i2}V_2 + \delta_{i3}V_3 \tag{119}$$

Para $i = 1$, o único termo que não se anula é $\delta_{11}V_1 = V_1$. Mas o número 1 não tem nada de especial, logo, devemos ter que

$$\delta_{ij}V_j = V_i \tag{120}$$

Note que

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3 \tag{121}$$

pois o índice i, repetido, indica a soma.

4.3 O símbolo ϵ_{ijk}

O símbolo ϵ_{ijk} é a chave deste método. Vamos definí-lo:

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= 1 \\ \epsilon_{132} &= -1 \\ \epsilon_{123} &= \epsilon_{312} = \epsilon_{231} \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{321} \\ \epsilon_{113} &= 0 \end{aligned} \tag{122}$$

Em palavras, quando houver índices repetidos em ϵ_{ijk}, seu valor é zero. Os demais casos estão descritos na tabela acima. Note-se que $\epsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0$ (por que?).

Uma maneira mais elegante de descrever as propriedades de ϵ_{ijk} é a seguinte: considere todas as permutações dos números 1,2,3. Por exemplo, (123), (231), (312),...Tomemos a particular permutação (123). Diz-se que uma permutação é *par* em relação a (123) se, para obtê-la a partir de (123) é necessário um número par de trocas de índices. A permutação (213) não é par, pois é obtida de (123) pela troca de *um* par de índices: (12) $\rightarrow$ (21). Ela é dita *impar* em relação a (123). Pois bem, ϵ_{ijk} e ϵ_{lmn} sejam tais que $i \neq j \neq k$ e $l \neq m \neq n$. ϵ_{ijk} terá o mesmo sinal de ϵ_{lmn}, se (lmn) for uma permutação par em relação a (ijk). Em particular,

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} \tag{123}$$

4.4 O produto vetorial

O produto vetorial de $\vec{V}$ por $\vec{W}$, denotado por $\vec{V} \times \vec{W}$ é escrito assim:

$$(\vec{V} \times \vec{W})_i = \epsilon_{ijk} V_j W_k \tag{124}$$

Como um vetor é, nessas notas, expresso por suas componentes, o produto vetorial, que é um vetor, é definido expressando-se sua componente genérica em termos das componentes dos fatores $\vec{V}$ e $\vec{W}$. Recomendo ao leitor que verifique esta definição fazendo o cálculo explícito das componentes.

O produto vetorial é normalmente apresentado em termos de um determinante simbólico:

$$\vec{V} \times \vec{W} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ V_x & V_y & V_z \\ W_x & W_y & W_z \end{pmatrix} \tag{125}$$

cujo significado é

$$\vec{V} \times \vec{W} = \vec{i}\,(V_y W_z - W_y V_z) + \vec{j}\,(W_x V_z - W_z V_x) + \vec{k}\,(V_x W_y - V_y W_x) \tag{126}$$

Da eq.(124) temos, por exemplo,

$$(\vec{V} \times \vec{W})_x = (\vec{V} \times \vec{W})_1 = \epsilon_{1jk} V_j W_k = \epsilon_{123} V_2 W_3 + \epsilon_{132} V_3 W_2 = V_y W_z - V_z W_y \tag{127}$$

em acordo com a expressão acima. O leitor deve realizar este cálculo em detalhe, mostrando que a soma em j e k se reduz, efetivamente, aos dois termos presentes na eq.(127).

4.5 Teorema importantíssimo

Nesta seção apresentamos a nossa fórmula mágica, com a qual serão realizados pequenos milagres. Ela é:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{lk} \tag{128}$$

Não apresentaremos nenhuma demonstração desta fórmula. Não é o espírito destas notas. A idéia é *decorá-la*: ajuda muito o fato de que ela tem uma estrutura muito simples. Ao leitor desconfiado recomendo uma dessas duas coisas: verificar a fórmula, caso a caso (é factivel!), ou consultar a ref.[7], de Sir Jeffreys e Lady Jeffreys (está à página 73). (Se estiver cheio de vontade, leia o livro todo, que é muito bom!).

4.5.1 Aplicações

A primeira aplicação do teorema importantíssimo (eq.(128)) é o cálculo do duplo produto vetorial, $\vec{V} \times (\vec{W} \times \vec{U})$. Temos:

$$\left(\vec{V} \times (\vec{W} \times \vec{U})\right)_i = \epsilon_{ijk} V_j (\vec{W} \times \vec{U})_k \tag{129}$$

Por outro lado,

$$(\vec{W} \times \vec{U})_k = \epsilon_{klm} W_l U_m \tag{130}$$

de modo que

$$\left(\vec{V} \times (\vec{W} \times \vec{U})\right)_i = \epsilon_{ijk} V_j \epsilon_{klm} W_l U_m \tag{131}$$

Nesta última equação temos a combinação $\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}$, que é a mesma coisa que $\epsilon_{kij}\epsilon_{klm}$. Pelo teorema importantíssimo,

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{132}$$

Levando este resultado à eq.(131), temos

$$\begin{aligned}\left(\vec{V}\times(\vec{W}\times\vec{U})\right)_i &= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl})V_jW_lU_m \\ &= W_iV_jU_j - U_iV_jW_J \\ &= (\vec{V}.\vec{U})W_i-(\vec{V}.\vec{W})U_i\end{aligned} \tag{133}$$

ou seja, finalmente,

$$\vec{V}\times(\vec{W}\times\vec{U}) = (\vec{V}.\vec{U})\vec{W}-(\vec{V}.\vec{W})\vec{U} \tag{134}$$

Para a segunda aplicação vamos introduzir o "vetor" $\vec{\nabla}$, cujas componentes são dadas por

$$(\vec{\nabla})_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{135}$$

onde x_i representa, claramente, a i-ésima coordenada cartesiana $i=1,2,3$. Usaremos também uma abreviação mais drástica:

$$(\vec{\nabla})_i = \partial_i \tag{136}$$

Com isto podemos introduzir o divergente de um campo vetorial. Sejam $V_i(x,y,z)$ as componentes cartesianas de um campo vetorial. O campo escalar $div\ \vec{V}$ é descrito por

$$div\ \vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \partial_iV_i \tag{137}$$

Um desafio mais interessante é o tratamento do operador rot. O rotacional do campo vetorial $\vec{V}$ é em geral apresentado em termos de suas coordenadas cartesianas, dadas pelo determinante simbólico:

$$rot\ \vec{V} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{pmatrix} \tag{138}$$

que significa

$$rot\ \vec{V} = \vec{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y}-\frac{\partial V_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z}-\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x}-\frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \tag{139}$$

Para a nossa notação é útil lembrar que $rot\ \vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V}$. Por isso,

$$(\vec{\nabla}\times\vec{V})_i = \epsilon_{ijk}\partial_jV_k \tag{140}$$

Como mais uma aplicação simples, vamos mostrar que $rot\ grad = 0$.

$$(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f)_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_k} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \tag{141}$$

Para mostrar que isto é zero, vamos recorrer a outro resultado importante. Seja A_{ij} tal que $A_{ij} = -A_{ji}$, e S_{ij} tal que $S_{ij} = S_{ji}$. Dizemos que S é simétrica, e que A é antissimétrica. Vamos mostrar que

$$S_{ij} A_{ij} = 0 \tag{142}$$

(Note que um caso particular desta relação é que $\epsilon_{ijk}\delta_{ij} = 0$, pois $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ enquanto $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$). A prova é esta:

$$S_{ij} A_{ij} = -S_{ij} A_{ji} \tag{143}$$

pela antissimetria de A. Agora, mudamos os nomes dos índices: aquele que era denotado por i passa a ser denotado por j, e vice-versa. A expressão anterior então fica, repetindo-a desde o começo:

$$S_{ij} A_{ij} = -S_{ij} A_{ji} = -Sji A_{ij} = -Sij A_{ij} \tag{144}$$

onde, na última igualdade, usamos a simetria de S. Comparando os dois extremos, vemos que temos uma expressão $X = -X$, cuja única solução é 0. Logo,

$$S_{ij} A_{ij} = 0 \tag{145}$$

Um ponto que em geral causa perplexidade é a "mudança de nome" dos índices. Isto é uma coisa muito simples, se se restaura, por um momento o símbolo de somatório:

$$\sum_{i=1}^{3} S_i = \sum_{j=1}^{3} S_j \tag{146}$$

ou seja, a letra que designa a soma é arbitrária. Podemos trocá-la à vontade. Por isso, $S_{ij} A_{ij} = S_{ji} A_{ji} = S_{lm} A_{lm}$.

Voltando à eq.(141), temos

$$\epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \tag{147}$$

pois se aprende no Cálculo Diferencial e Integral que a derivada mista não depende da ordem de derivação, ou seja, por exemplo,

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \tag{148}$$

Logo, a eq.(141) nos diz que

$$rot\ grad\ f = 0 \tag{149}$$

qualquer que seja f.

4.6 Aplicações "peso-pesado"

Aqui veremos resultados que são difíceis, ou muito trabalhosos, de obter por outros métodos. Em primeiro lugar, vamos mostrar (como aquecimento) que $div\ rot = 0$.

$$div\ rot\ \vec{V} = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \partial_i.(\vec{\nabla} \times \vec{V})_i = \partial_i \epsilon_{ijk} \partial_j V_k = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j V_k \tag{150}$$

Ora,

$$\epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j = 0 \tag{151}$$

pois ϵ_{ijk} é antissimétrico pela troca de índices (ij), e $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$. Segue que

$$div\ rot\ \vec{V} = 0 \tag{152}$$

qualquer que seja $\vec{V}$.

Seja $\vec{E}$ um campo vetorial. Por exemplo, o campo elétrico. Na teoria de Maxwell precisamos calcular $rot\ rot\ \vec{E}$. Com o nosso método, isso é simples:

$$\begin{aligned}\left(\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right)_i &= \epsilon_{ijk}\partial_j(rot\ \vec{E})_k \\ &= \epsilon_{ijk}\partial_j\epsilon_{klm}\partial_l E_m \\ &= \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l E_m \\ &= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_j\partial_l E_m \\ &= (\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{lj})\partial_j\partial_l E_m \\ &= \partial_m\partial_i E_m - \partial_j\partial_j E_i\end{aligned} \tag{153}$$

Resta interpretar o resultado. A última linha pode ser escrita:

$$\partial_i\partial_m E_m - \partial_j\partial_j E_i = \partial_i(\vec{\nabla}\vec{E}) - \vec{\nabla}^2 E_i = \left(grad\ div\ \vec{E} - \vec{\nabla}^2\vec{E}\right)_i \tag{154}$$

Logo,

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}) = grad\ div\ \vec{E} - \vec{\nabla}^2\vec{E} \tag{155}$$

Outra relação de grande importância na eletrodinâmica é envolve o cálculo de $div(\vec{E}\times\vec{B})$.

$$\begin{aligned}div(\vec{E}\times\vec{B}) = \partial_i\epsilon_{ijk}E_jB_k &= \epsilon_{ijk}(\partial_i E_j)B_k + \epsilon_{ijk}E_j(\partial_i B_k) \\ &= B_k\epsilon_{kij}\partial_i E_j - E_j\epsilon_{jik}\partial_i B_k \\ &= B_k(rot\ \vec{E})_k - E_j(rot\ \vec{B})_j \\ &= \vec{B}.rot\ \vec{E} - \vec{E}.rot\ \vec{B}\end{aligned} \tag{156}$$

Finalmente, vamos ao nosso *tour de force*: calcular$\vec{\nabla}.(\vec{A}.\vec{B})$.

$$\left(\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B})\right)_i = \partial_i(A_jB_j) = (\partial_i A_j)B_j + A_j(\partial_i B_j) \tag{157}$$

$$= (\partial_i A_j - \partial_j A_i)B_j + (\partial_j A_i)B_j + A_j(\partial_i B_j - \partial_j B_i) + A_j\partial_j B_i$$

Temos, preliminarmente, que

$$(\partial_j A_i)B_j = B_j\partial_j A_i = (\vec{B}.\vec{\nabla})A_i \tag{158}$$

$$(A_j\partial_j)B_i = (\vec{A}.\vec{\nabla})B_i \tag{159}$$

de maneira que, também preliminarmente,

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + ... \tag{160}$$

Para calcular os termos adicionais, notemos que

$$\partial_i A_j - \partial_j A_i = \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_l A_m \tag{161}$$

como o leitor, a esta altura, poderá facilmente verificar. Logo,

$$(\partial_i A_j - \partial_j A_i)B_j = B_j \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_l A_m = B_j \epsilon_{kij}(rot\ \vec{A})_k \quad (162)$$
$$= \epsilon_{ijk} B_j (rot\vec{A})_k = (\vec{B} \times rot\ \vec{A})_i$$

Analogamente,

$$A_j(\partial_i B_j - \partial_j B_i) = (\vec{A} \times rot\ \vec{B})_i \quad (163)$$

Juntando estes termos à eq.(160), temos

$$\vec{\nabla}(\vec{A}.\vec{B}) = (\vec{B}.\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}.\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \times rot\ \vec{A}) + (\vec{A} \times rot\ \vec{B}) \quad (164)$$

4.7 Comentários

Como alertamos, tratamos aqui do cálculo vetorial *for the practical man*. Para um estudo completo do cálculo vetorial é preciso abordá-lo sob forma geométrica. Um texto recente de muito boa qualidade é o Marsden, Tromba [8]; muito elegante e profundo é o texto de Hermann Weyl, contido no seu trabalho sobre projeção ortogonal. Modernamente se costuma refazer o cálculo vetorial na linguagem das formas diferenciais exteriores, que dão o contexto natural, sobretudo para os teoremas integrais, do tipo Gauss-Ostrogradskii e Stokes. Para isso recomendo Bishop-Goldberg [9]. Um livro recente de Janich [10] parece ser muito bom (só o folheei, porém).

5 A magia da equação de Laplace

Na eletrostática temos as equações básicas

$$rot\vec{E} = 0 \quad (165)$$

(que significa que a força eletrostática é conservativa) e, nas regiões onde não há cargas,

$$div\vec{E} = 0\ . \quad (166)$$

A primeira dessas equações é equivalente a

$$\vec{E} = -grad\ \phi\ , \quad (167)$$

onde ϕ é o potencial escalar. Usando 167 em 166, temos

$$div\ grad\ \phi = 0 \quad (168)$$

ou

$$\vec{\nabla}^2\phi = 0 \quad (169)$$

onde $\vec{\nabla}^2$ é o operador Laplaceano. A equação 169 é a famosa equação de Laplace. Boa parte de sua fama é devida a um poderoso teorema de existência e unicidade que é o tema principal dessas notas. Para demonstrar esse teorema precisamos do teorema do divergente.

Numa região onde há cargas, não vale a equação de Laplace, que é substituída pela equação de Poisson,

$$\vec{\nabla}^2\phi = -4\pi\rho \tag{170}$$

onde ρ é a densidade volumétrica de carga. Por outro lado, generalizando a lei de Coulomb, vimos que

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \ , \tag{171}$$

e que, portanto, a Eq.(171) exibe uma solução da Eq.(170). De fato, (171) é a solução de (170) que se anula no infinito. Mais tarde vamos estudar o método inventado por George Green para obter este resultado trabalhando diretamente com a equação de Poisson.

5.1 Teorema do divergente

Seja $\vec{W}$ um campo vetorial "bem comportado", S uma superfície fechada, e V o volume interno a esta superfície. Então,

$$\int dV div\, \vec{W} = \int_S \vec{W}.\vec{n} dS \tag{172}$$

onde $\vec{n}$ é a normal externa à superfície. Não vamos demonstrar este teorema, mas usá-lo para demonstrar outros. Trata-se de um teorema clássico da Análise. Uma demonstração moderna, usando a teoria das formas diferenciais exteriores encontra-se em [1], [2] ou [3]. Na aula apresentamos uma "demonstração" para o caso de um cubo, que serve para entender a idéia central, num caso simples. Para a demonstração clássica, o leitor não pode perder a oportunidade de consultar um dos grandes livros de todos os tempos, o *Treatise on Electricity and Magnetism*, de James Clerk Maxwell, ainda publicado pela Dover. Narrando uma das maiores descobertas de todos os tempos, a natureza eletromagnética da luz, esse livro, extraordinariamente bem escrito, mantém ainda uma grande vivacidade e supera de muito todos os epígonos modernos [4].

Na verdade, o teorema do divergente vale em situações mais gerais: considere uma esfera da qual se subtrai o volume de uma esfera concêntrica e menor. Seja V o volume externo à esfera pequena e interno à grande; seja Σ

a superfície composta pela superfície da esfera interna orientada pela normal *interna*, denominada Σ_1, e pela superfície da esfera grande, orientada pela normal externa, denominada Σ_2. Então, vale a seguinte versão do teorema do divergente:

$$\int_V d^3\vec{r} div\vec{V} = \int_{\Sigma_1} \vec{V}.\vec{n}dS + \int_{\Sigma_2} \vec{V}.\vec{n}dS. \tag{173}$$

É claro que as superfícies externa e interna não precisam ser esféricas, e que o número de superfícies componentes não se restringe a dois, podendo ser qualquer.

5.2 Fórmulas de Green

Seja u uma função tal que

$$\vec{\nabla}^2 u = 0 \ , \tag{174}$$

ou seja, u é solução da equação de Laplace. Diz-se então que u é *harmônica*. Sejam u e v duas funções definidas em uma região R, e seja Σ a superfície (eventualmente composta de várias partes conexas) que delimita essa região. Apliquemos o teorema do divergente à função $u\vec{\nabla}v$. Temos, preliminarmente, que

$$div(u\vec{\nabla}v) = u\vec{\nabla}^2 v + \vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v \tag{175}$$

Logo,

$$\int div(u\vec{\nabla}v)dV = \int u\vec{\nabla}^2 v dV + \int \vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v dV = \int_\Sigma u\vec{\nabla}v.\vec{n}dS \tag{176}$$

onde a igualdade entre a primeira e a última integrais constitui o teorema do divergente. Rearranjando, temos

$$\int dV\vec{\nabla}u.\vec{\nabla}v = -\int dV u\vec{\nabla}^2 v + \int_\Sigma u\vec{\nabla}v.\vec{n}dS \tag{177}$$

Esta equação é denominada *primeira fórmula de Green*. Considere agora a função $u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u$, e apliquemos a ela o teorema do divergente. Temos

$$\int dV div(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u) = \int dv(u\vec{\nabla}^2 v - v\vec{\nabla}^2 u) = \int dS(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u).\vec{n} \tag{178}$$

Logo,

$$\int dv(u\vec{\nabla}^2 v - v\vec{\nabla}^2 u) = \int dS(u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u).\vec{n} \tag{179}$$

Esta igualdade é denominada *segunda fórmula de Green*.

George Green foi um físico-matemático de primeira grandeza, embora tenha sido sempre um amador, e nunca tenha tido qualquer diploma universitário. Seu pai era dono de um moinho, trabalhava duro e achava que esse negócio de física- matemática era coisa de ... Deixa prá lá! Estudando por conta própria Green descobriu praticamente todos os métodos matemáticos da teoria de campos, entre os quais a função de Green e os potenciais ϕ e $\vec{A}$. Publicou, em pequena tiragem, por conta própria, suas descobertas em um tratado, que se tornou obra ambicionadíssima e rara, naqueles tempos sem xerox. Quando o jovem William Thomson, depois Lord Kelvin, visitou Paris, havia uma fila de físicos e matemáticos eminentes querendo ter uma entrevista com aquele jovem quase desconhecido. O que eles queriam era tomar emprestado o tratado de Green, do qual Kelvin era o feliz possuidor de uma cópia.

5.3 Teorema de unicidade

O grande poder da equação de Laplace está no fato de que, em certas condições, pode-se garantir a existência e a unicidade da solução. Assim, qualquer que seja o método pelo qual a solução é obtida, a solução é aquela, e nenhuma outra. Vamos demonstrar aqui a unicidade. O teorema de existência é difícil, e sua demonstração ajuda pouco na compreensão do problema. Suponhamos que u seja harmônica no volume V, e tomemos $v = u$. Usando a Eq.(177) temos então

$$\int dV \vec{\nabla} u . \vec{\nabla} u = -\int dV u \vec{\nabla}^2 u + \int_S u \vec{\nabla} u . \vec{n} dS \tag{180}$$

Logo,

$$\int dV |\vec{\nabla} u|^2 = \int u \vec{\nabla} u . \vec{n} dS \tag{181}$$

Uma conseqüência dessa fórmula é a seguinte: seja u harmônica em V e nula em S, que é a superfície que delimita V. Então u é nula em V. De fato, $\int dV |\vec{\nabla} u|^2 = 0$ implica em $\vec{\nabla} u = 0$ em V, e, portanto, $u = constante$ em V. Como u é contínua, esta constante tem de ser zero, pois $u = 0$ na superfície.

Sejam agora f e g duas funções harmônicas em V e tais que $f = g$ na superfície que delimita este volume. Então, $f = g$ em todo o volume. De fato, basta aplicar o teorema anterior para a função $f - g$.

Chegamos assim ao enunciado do grande teorema de unicidade: se f é uma solução da equação de Laplace que tem valores determinados sobre uma superfície fechada, f é única. Um exemplo de aplicação deste teorema com relevância para a física é o seguinte: determinar uma função que satisfaça a equação de Laplace no interior de uma superfície fechada e que seja constante, igual a C, nessa superfície. Seja f a função constante cujo valor é C. Ela

é solução da equação de Laplace, e seu valor sobre a superfície fechada é C. Logo, pelo teorema de unicidade, esta função é a única função que satisfaz a equação de Laplace e vale C na superfície considerada. Na física, o potencial eletrostático, em uma região onde não há cargas, é harmônico (satisfaz a equação de Laplace). Por outro lado, sabe-se que, no equilíbrio, o potencial sobre a superfície de um condutor é constante. Logo, como, dentro de um condutor, a carga é zero, temos que o potencial é constante, com aquele valor que ele assume na superfície. Segue como conseqüência que o campo elétrico é zero, no interior do condutor.

5.4 Máximos e mínimos

Funções harmônicas, e, em particular, potenciais em regiões onde não há cargas, não podem ter máximos nem mínimos. A demonstração deste importante resultado é usualmente feita utilizando a segunda fórmula de Green. Seja Σ uma superfície esférica com centro em $r = 0$, e V o volume delimitado por ela. Seja u uma função harmônica, e seja $v = \frac{1}{r}$, que é uma função harmônica exceto para $r = 0$. A segunda fórmula de Green aplicada a essas funções u e v dá:

$$\int dV \left(u\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} \right) = \int_S \left(u\vec{\nabla}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\vec{\nabla}u \right) .\vec{n} \tag{182}$$

Mas, na superfície esférica, onde a segunda integral é calculada, $r = R$, onde R, constante, é o raio da esfera. Logo,

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{1}{R^2}\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{1}{R^2}\vec{n} \tag{183}$$

e, então,

$$\int dV \left(u\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{R^2}\int dSu\vec{n}.\vec{n} = -\frac{1}{R^2}\int dSu \tag{184}$$

Mas (veja Apêndice),

$$\int dVu\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = -4\pi u(0) \tag{185}$$

logo,

$$u(0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int udS \tag{186}$$

que está nos dizendo o seguinte: uma função harmônica tem, em qualquer ponto, como valor, a média dos valores que tem em uma superfície esférica qualquer centrada neste ponto (desde que contida na região em que a função é harmônica). Uma aplicação imediate é a seguinte: dada uma distribuição

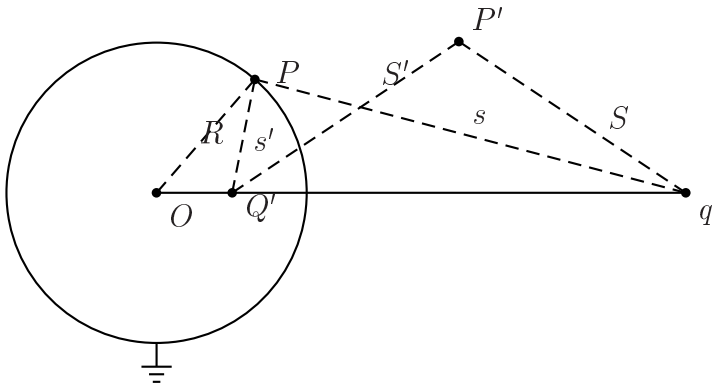
de cargas em repouso, não há pontos em que uma carga-teste permaneça em equilíbrio, a não ser aqueles pontos onde já existam cargas (e, por conseguinte, onde a equação de Laplace não seja satisfeita).

5.5 Aplicações

Como aplicações desses poderosos teoremas, vamos resolver completamente o seguinte problema: uma carga puntifome de valor q é posta a uma distância d do centro de uma esfera condutora de raio R. A carga é externa à esfera, ou seja, $d > R$. Determinar o campo elétrico resultante. Primeiramente, vamos supor que a esfera esteja ligada à terra, que é uma linguagem técnica para dizer que o potencial na esfera é mantido igual a zero. Este problema não é do tipo que pode ser resolvido pelo uso da solução da equação de Poisson dada por

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tag{187}$$

porque não conhecemos a distribuição de cargas que aparecem no condutor por causa da presença da carga q externa. Por outro lado, sabemos que, fora do condutor, só existe a carga q, e que, portanto, fora do condutor (e excluído o ponto onde está a carga q), a equção de Laplace é satisfeita. A figura abaixo descreve a situação.



A primeira aplicação do teorema de unicidade da equação de Laplace a este caso é muito simples: determinar o potencial em todos os pontos no interior da esfera condutora. Como o condutor está em equilíbrio, sabemos que sua superfície é uma equipotencial; além disso, como está ligado à terra, o valor desse potencial constante é zero, pelo menos na superfície. Considere a região interna ao condutor, limitada, isto é, pela superfície (fechada) do mesmo.

Para esta região só existe uma solução com valor zero na superfície, pelo teorema da unicidade. Ora, a função que tem valor zero em todos os pontos do interior satisfaz obviamente, aí, a equação de Laplace, e tem o valor zero na superfície. Então, resolve o problema, e é a única solução.

Pode-se usar este método também para a região externa à esfera, com algum cuidado. Primeiro, consideremos a superfície complexa (isto é, composta de várias partes) formada por: a superfície esférica da figura; uma pequeninníssima superfície esférica em torno da carga q; uma outra superfície esférica, concêntrica com a primeira, e de raio muitíssimo grande. Orientemos as três superfícies assim: a esfera condutora, com a normal interna; a pequena esfera, com a normal interna; a enorme esfera, com a normal externa. Juntas e orientadas assim, elas são a "superfície externa" do volume externo ao condutor e à esferinha, e interno à esferona. Neste volume não há cargas, logo, o potencial satisfaz a equação de Laplace. Além disso, temos as seguintes condições sobre os "contornos" (que são as superfícies citadas): sobre o condutor, $\phi = 0$; sobre a esferinha de raio ϵ, $\phi = \frac{q}{\epsilon}$, sobre a esferona, $\phi = 0$ (ela é muuuito grande!). Posteriormente fazemos o raio da esfera grande tender ao infinito. Então podemos usar o teorema da unicidade para essar região. Se acharmos uma função que satisfaça a esuqção de Laplace na região e tenha os valores estipulados nas siperfícies, essa será a solução única.

William Thomson, Lord Kelvin[7] teve uma de suas idéias geniais: percebeu que poderia obter um potencial com as propriedades acima trabalhando com uma distribuição de cargas muito simples: simplesmente adicionando, à carga q, uma carga q', de valor a ser determinado, na posição Q' (veja a figura). O que esta posição tem de especial é que o ponto Q' é escolhido de tal forma que o triângulo qPO seja semelhante ao triângulo $PQ'O$. Vamos mostrar que o potencial criado só por essas duas cargas tem as propriedades desejadas (no exterior da esfera condutora). De fato, sendo o potencial de duas cargas puntiformes, ele satisfaz a equação de Laplace em todos os pontos, menos aqueles onde as cargas estão. Portanto, em toda a região descrita. Além disso, ele se anula no infinito, e o leitor não terá dificuldades para provar que, numa superfície esférica infinitamente próxima de q, o potencial é $\frac{q}{\epsilon}$. Resta mostrar que este potencial é zero na superfície da esfera condutora.

[7]Lord Kelvin foi o físico inglês mais famoso de sua época, mesmo tendo sido contemporâneo de Maxwell , que hoje consideramos superior. Além de sua contribuição imortal à segunda lei da termodinâmica, realizou uma vastíssima obra que cobriu toda a física. Mas sua fama popular veio de sua contribuição, essencial, ao projeto de construção, e instalação, do primeiro *cabo submarino*, um fio submarino que ligou a Inglaterra aos Estados Unidos e deu origem à telefonia e telegrafo de longas distâncias. Kelvin instalou pessoalmente o cabo que projetara, e sua aventura, pois disso se tratou, foi acompanhada pelos jornais com grande sensação.

Isto também é facil. Sejam d e d', respectivamente, as distâncias do ponto q e do ponto Q' ao centro da esfera. Mostra-se facilmente, da semelhança de triângulos, que

$$dd' = R^2 \tag{188}$$

Ainda da semelhança de triângulos segue que

$$\frac{s'}{R} = \frac{s}{d} \tag{189}$$

ou

$$s' = \frac{R}{d}s \tag{190}$$

Suponhamos que exista uma carga q' no ponto Q. O potencial criado pelas cargas q e q' no ponto P (que é um ponto genérico da superfície do condutor) é:

$$\phi(P) = \frac{q}{s} + \frac{q'}{s'} \tag{191}$$

ou

$$\phi(P) = \frac{1}{s}\left(q + \frac{d}{R}q'\right) \tag{192}$$

Se tomarmos $q' = -q\frac{R}{d}$ teremos $\phi(P) = 0$ em todos os pontos da superfície ezférica. Era o que queríamos. Portanto, o potencial criado por uma carga puntiforme q diante de um condutor esférico aterrado, e distante d do centro da esfera é, para pontos externos à esfera, equivalente ao potencial das cargas q e q' apenas descritas. Ora, o potencial dessas cargas é muito facil de calcular. De fato, seja P' um ponto qualquer fora do condutor, distante S da carga q, e S' da carga q'. Temos,

$$\phi(P') = \frac{q}{S} + \frac{q'}{S'} \tag{193}$$

A partir deste potencial podemos calcular o campo elétrico $\vec{E}$ desta mesma distribuição física de cargas e, finalmente, chegar a uma expressão para a densidade de cargas que se instala na superfície do condutor por influência da carga externa q. Estes últimos caálculos ficam como um exerício facil para o leitor.

5.6 Apêndice

A equação

$$\int dV u\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = -4\pi u(0) \tag{194}$$

merece tratamento especial. Em primeiro lugar, porque uma cálculo apressado de $\vec{\nabla}^2\frac{1}{r}$ dá zero, o que daria zero para o primeiro membro. Mas esse cálculo está errado, pois a função $\frac{1}{r}$ é descontínua no ponto $r = 0$. Uma maneira de descobrir que o laplaceano de $\frac{1}{r}$ não é sempre zero é pelo uso do teorema do divergente. De fato,

$$\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = div\ grad\ \frac{1}{r} = -div\ \frac{\vec{r}}{r^3}$$

logo, tomando uma esfera de raio R

$$\int dV\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = -\int dV div\ \frac{\vec{r}}{r^3} = -\int_S \frac{\vec{r}}{r^3}.\vec{n}dS \tag{195}$$

e isto é o fluxo do campo elétrico $\frac{-\vec{r}}{r^3}$, que é o campo de uma carga -1 colocada na origem. Logo, pelo teorema de Gauss, esse fluxo é igual a -4π. Conseqüentemente, o primeiro membro da Eq.(195) não pode ser zero, ou seja, $\vec{\nabla}^2\frac{1}{r}$ não pode ser identicamente zero. No entanto, para $r \neq 0$, o laplaceano é nulo, pois a função é contínua, e o cálculo direto está correto. Logo, é no ponto $r = 0$ que acontece alguma coisa interessante. Incidentalmente, mostramos que

$$\int dV\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = -4\pi \tag{196}$$

Voltemos ao cálculo da Eq.(194). Note-se que, para qualquer $r \neq 0$, $\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = 0$, ou seja, o valor da função u para $r \neq 0$ é irrelevante para o cálculo da integral, uma vez que vem sempre multiplicado por 0. O único valor de u que interessa é $u(0)$. Logo, a integral não se altera se substituirmos u pela função constante que tem o valor $u(0)$ em todos os pontos. Assim,

$$\int dVu\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = \int dVu(0)\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = u(0)\int dV\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = -4\pi u(0) \tag{197}$$

que é o resultado que queríamos obter.

Em tratamentos mais avançados se demonstra a seguinte relação:

$$\vec{\nabla}^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}) \tag{198}$$

onde, no segundo membro, aparece a "função" delta de Dirac. Este resultado sintetiza o resultado anterior e muitos outros semelhantes. Veja, por exemplo, as minhas notas sobre as funções de Green, e sobretudo, a grande obra de Dirac [5], "Principles of Quantum Mechanics", tida por muitos como o maior livro de Física desde os "Principia" de Newton[6].

6 Apêndice: Two theorems by Helmholtz

6.1 Introduction

What is usually called Helmholtz theorem[11] is the fact that a vector field $\vec{V}$ which vanishes at infinity is completely determined by giving, everywhere, $div\vec{V}$ and $curl\ \vec{V}$. Helmholtz arrived at it in his study of vortices in fluids[14]. Nowadays it is mostly used in Electrodynamics, where the very Maxwell equations express its importance by being nothing else than the specification of what the *div* and *curl* of the electric and magnetic fields are.

6.2 The First Theorem

Actually, the Helmholtz theorem[8] proves a slightly different thing, from which the statement above follows immediately: a vector field $\vec{V}$ which vanishes at the boundaries can be written as the sum of two terms, one of which is irrotational and the other, solenoidal (that is, divergenceless)[12]. Consider the following well-known identity for an arbitrary vector field $\vec{Z}(\vec{r})$:

$$-\vec{\nabla}^2\vec{Z} = -\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{Z}) + \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{Z} \tag{199}$$

If we now take our vector field to be

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}^2\vec{Z} \tag{200}$$

then it follows that

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}U + \vec{\nabla}\times\vec{W} \tag{201}$$

with

$$U = \vec{\nabla}.\vec{Z} \tag{202}$$

and

$$\vec{W} = \vec{\nabla}\times\vec{Z} \tag{203}$$

Eq.(201) is Helmholtz's theorem, as $\vec{\nabla}U$ is irrotational and $\vec{\nabla}\times\vec{W}$ is solenoidal.

But, is it general? It assumes that our vector field can be written as the Laplacian of some other one...
This constitutes, however, no problem if $\vec{V}$ vanishes at infinity fast enough, for, then, the equation

$$\vec{\nabla}^2\vec{Z} = -\vec{V}\ , \tag{204}$$

[8] In modern form, much generalized, this is the famous Kodaira-Hodge-De Rham decomposition theorem[16]

which is Poisson's equation, has always the solution

$$\vec{Z}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{r'}\frac{\vec{V}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}\ . \tag{205}$$

It is now a simple matter to prove, from Eq.(201), that $\vec{V}$ is determined from its *div* and *curl*. Taking, in fact, the divergence of Eq.(201), we have:

$$div\vec{V} = -\vec{\nabla}^2 U \tag{206}$$

which is, again, Poisson's equation, and, so, determines U as

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3\vec{r'}\frac{\vec{\nabla}'.\vec{V}(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|} \tag{207}$$

Take now the *curl* of Eq.(201). We have

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{V} &= \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{W} \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{W}) - \vec{\nabla}^2\vec{W}\end{aligned} \tag{208}$$

Now, $\vec{\nabla}.\vec{W} = 0$, as $\vec{W} = \vec{\nabla}\times\vec{Z}$, so another Poisson equation determines $\vec{W}$. Using U and $\vec{W}$ so determined in Eq.(201) proves our contention.

6.3 Applications

We start with a very simple one. Consider a homogeneous, ohmian conductor, and let the current density $\vec{j}$ vanish at the closed surface which encircles it. We want to inquire as to the possibility that a stationary current may exist in this conductor. We then have $\vec{\nabla}.\vec{j} = 0$, as the current is supposed to be stationary, and $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, which is Ohm's law. Also, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$, for a static $\vec{E}$. But then,

$$\vec{\nabla}\times\vec{j} = \sigma\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \tag{209}$$

and so we have both $\vec{\nabla}.\vec{j} = 0$ and $\vec{\nabla}\times\vec{j} = 0$. Besides, $\vec{j}$ vanishes at the boundaries. It follows, then, from Helmholtz's theorem, that $\vec{j} = 0$. So, no stationary current can run under these conditions. Notice that this is true also for a torus and its continuous deformations, so that it applies to any closed circuit, proving the necessity that the condition $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ be broken somewhere in the circuit (where the electromotive force is located).

Consider now the electromagnetic potentials. The Maxwell equation

$$\vec{\nabla}.\vec{B} = 0 \tag{210}$$

states that there exists a vector field $\vec{A}$ such that

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{211}$$

this $\vec{A}$ being called the vector potential. We may assume that $\vec{A}$ vanishes at infinity. Now, what we know about $\vec{A}$ is just its *curl*. Therefore, by Helmholtz's theorem, we are free to choose the value of its divergence. For instance, we may take $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$, determining completely $\vec{A}$. This is the so-called Coulomb gauge. But we can also put $\vec{\nabla}.\vec{A} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}$, ϕ being the scalar potential. This is the Lorentz gauge.

6.4 The Second Theorem

There is another important result by Helmholtz in the same paper we mentioned above. It concerns the most general infinitesimal deformation of a plastic (that is, non-rigid) body.[9]

Consider a small volume element of a deformable body (a fluid, say). Putting the origin of the coordinates inside this volume element, let $\vec{r}$ be the position of a generic point P. The origin is denoted by O. After a deformation, the material point P has a new position vector, $\vec{r} + \vec{s}$. Also the point of the body located at the origin moved, its position now being given by $\vec{s}_0$. We assume, as physically reasonable, that $\vec{s}$ is, as a function of position, continuous and differentiable to any order. In what follows, in order to get results of enough generality, we assume P very close to O, that is to say, we consider an infinitesimal volume of the body. Notice that $\vec{s}$ itself doesn't have to be small in what follows, though, in considering deformations, this is somewhat academic, as finite deformations can always be obtained from infinitesimal ones (for instance, by Lie group methods). This notwithstanding, the geometrical interpretation we will get is only clear for infinitesimal $\vec{s}$. On the other hand, the application for the electric field which is done below would be impoverished by confining $\vec{s}$ to be infinitesimal.

A Taylor expansion for $\vec{s}$ gives

$$\vec{s}(\vec{r}) = \vec{s}_0 + (\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{s} \tag{212}$$

neglecting further corrections, what is allowed by the restriction to infinitesimal volume. Here we wrote $\vec{s}_0$ for $\vec{s}(\vec{0})$. In more detail, if s_i is the i-th component of $\vec{s}$, one has

$$s_i(\vec{r}) = (s_0)_i + \sum_l x_l (\frac{\partial s_i}{\partial x_l})_{\vec{r}=0} \tag{213}$$

[9] A beautiful treatment of this topic, as well as of the whole vector analysis, is found in Sommerfeld's *Mechanics of Deformable Bodies.*[15]

This can be abbreviated to

$$s_i = (s_0)_i + x_l \partial_l s_i \tag{214}$$

or,

$$s_i = (s_0)_i + x_l T_{li} \tag{215}$$

where, obviously,

$$T_{li} = (\partial_l s_i)_{\vec{r}=0} \ . \tag{216}$$

In order to analyse this deformation in terms of more basic ones, let us decompose T_{li} in the following way:

$$T_{li} = \frac{1}{2}(T_{li} + Til) + \frac{1}{2}(T_{li} - T_{il}) \tag{217}$$

and consider separately the symmetric and the antisymmetric parts. The antisymmetric part is

$$\frac{1}{2}(\partial_l s_i - \partial_i s_l) = \frac{1}{2}\epsilon_{lik}(curl\ \vec{s})_k \ . \tag{218}$$

The symmetric part is $S_{li} \equiv \frac{1}{2}(T_{li} + T_{il})$. It can be decomposed as follows:

$$S_{li} = \frac{1}{3}\delta_{li} S + (S_{li} - \frac{1}{3}\delta_{li} S) \tag{219}$$

where $S \equiv Tr(S_{li}) = S_{ii}$. Now, $S_{li} = \frac{1}{2}(\partial_l s_i + \partial_i s_l)$, so that

$$S = \partial_i s_i = \vec{\nabla}.\vec{s} \ . \tag{220}$$

We can therefore write Eq.(219) as

$$S_{li} = \frac{1}{3}\delta_{li}\vec{\nabla}.\vec{s} + S^0_{li} \tag{221}$$

where S^0_{li} is a traceless symmetric tensor. Going now to Eq.(215), we can write

$$s_i = (s_0)_i + x_l \frac{1}{2}\epsilon_{lik}(curl\ \vec{s})_k + \frac{1}{3}x_i\ div\vec{s} + x_l S^0_{li} \tag{222}$$

or,

$$\vec{s} = \vec{s}_0 + \frac{1}{2}(curl\ \vec{s} \times \vec{r}) + \frac{1}{3}\vec{r} div\ \vec{s} + \vec{r}.\mathbf{S^0} \tag{223}$$

where the last term is a vector whose i-th component is $x_l S^0_{li}$. An object like $\mathbf{S^0}$ is sometimes called a *dyadic*.It is a second-order tensor. Let us examine the meaning of the several terms of Eq.(223). The first term of the second

member is a translation. The second is an infinitesimal rotation around the axis $(curl\ \vec{s})_{\vec{r}=0}$, and the remaining terms describe a dilatation of the volume element. To understand them better, let us suppose temporarily that the translation and the rotation vanish, so that we have, for a component of $\vec{s}$:

$$s_i = \frac{1}{3} div\ \vec{s}\, x_i + x_l S^0_{li}\ . \tag{224}$$

Now, S^0_{li} is a symmetric matrix, so it can be diagonalized. This means that we can change coordinate axes in such a way that, in the new ones, the matrix elements of S^0 have the form $S^0_{li} = \delta_{li} S^0_{ii}$, where no sum is implied in this last expression. So, if the new coordinates are denoted by X_i, we have

$$\sum_l x_l S^0_{li} = \sum_l X_l \delta li S^0_{ii} = X_i S^0_{ii} \quad no\ sum\ on\ i \tag{225}$$

so that

$$s_i = \frac{1}{3} div\ \vec{s} X_i + S^0_{ii} X_i \ \ (no\ sum) \tag{226}$$

Consider the infinitesimal "cube" centered at O, with P as a vertex. (The "cube" may have curvilinear edges, at least after the deformation). Its volume before the deformation was, in the new coordinates, $V = X_1 X_2 X_3$. After the deformation, it is $V' = (X_1 + s_1)(X_2 + s_2)(X_3 + s_3)$. As we have, considering only the dilatation,

$$s_i = \frac{1}{3} div\ \vec{s} X_i + S^0_{ii} X_i = X_i (\frac{1}{3} div\ \vec{s} + S^0_{ii}) \tag{227}$$

then

$$X_i + s_i = X_i (1 + \frac{1}{3} div\ \vec{s} + S^0_{ii}) \equiv X_i (1 + \epsilon_i) \tag{228}$$

and, for the volume,

$$V' = X_1 X_2 X_3 (1 + \epsilon_1)(1 + \epsilon_2)(1 + \epsilon_3) \tag{229}$$

which, to first order is

$$V' = V(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \tag{230}$$

that is,

$$V' = V(1 + div\ \vec{s} + S^0_{11} + S^0_{22} + S^0_{33}) \tag{231}$$

but, as S^0_{ij} is traceless,

$$V' = V(1 + div\ \vec{s})\ . \tag{232}$$

So, the S^0_{ij} do not contribute to the change of volume, but do contribute to the change of the form of the little cube. Referring again to Eq.(223), we see that $\vec{s}$ is written as a sum of a translation, plus a rotation, plus an isotropic dilatation, plus a volume-conserving deformation.[10]

Notice that Eq.(223) was obtained using only Calculus. So, it should apply to any vector field whatsoever. To shed more light on the role of each term of the expansion, let us use it for the electric field. We then have:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{0}) + \frac{\vec{r}}{3}(div\,\vec{E})_0 + \frac{1}{2}[(curl\,\vec{E})_0 \times \vec{r}] + \vec{r}.\mathbf{S}^0 \ . \tag{233}$$

As $(div\,\vec{E})_0 = 4\pi\rho(\vec{0})$, the second term reads

$$\frac{\vec{r}}{3}(div\,\vec{E})_0 = \frac{\vec{r}}{3}4\pi\rho(\vec{0}) = \frac{4\pi}{3}r^3\rho(\vec{0})\frac{\vec{r}}{r^3} \ . \tag{234}$$

Now, this is the field of a uniformly charged sphere of radius r at a point of its surface. It is a radial field to be added to $\vec{E}_0$.

The second term vanishes if the fields are static. Otherwise,

$$(curl\,\vec{E})_0 = -\frac{1}{c}(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t})_0 \tag{235}$$

and

$$\frac{1}{2}[(curl\,\vec{E})_0 \times \vec{r}] = -\frac{1}{2c}\frac{\partial}{\partial t}[\vec{B}(\vec{0}) \times \vec{r}] \ . \tag{236}$$

Consider a uniform magnetic field of value $\vec{B}(\vec{0})$. A vector potential corresponding to it is

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{B}(\vec{0}) \times \vec{r} \tag{237}$$

so that we have

$$\frac{1}{2}[(curl\,\vec{E})_0 \times \vec{r}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \ . \tag{238}$$

This means that the third term of (233) is the contribution of the magnetic field at the origin, treated as follows: extend the value of $\vec{B}$ at $\vec{0}$ to a uniform field. Compute its vector potential and then add the term $-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ to $\vec{E}(\vec{0})$. All the rest of the field at $\vec{r}$ (and that could be a lot!) comes from the term $\mathbf{S}^0$.

[10]This is, in fact, the decomposition, following Weyl[13], of the tensor T_{li} into its irreducible components under rotations. This corresponds to analysing an infinitesimal deformation in terms of quantities which transform as irreducible representations of the rotation group. In particular, the traceless symmetric tensor "carries" an irreducible representation of dimension 5, an anisotropic object.

6.5 Conclusion

The first Helmholtz theorem explains why the *div* and *curl* are so ubiquitous in vector fields. It also explains the structure of Maxwell equations, usually written in such a way that the first member of each is either a *div* or a *curl*. The second explains the meanings, and so also the names, of those operators. Considering that Hermann von Helmholtz graduated in Medicine, not in Physics, that was not a bad job at all!

7 Campos vetoriais: formulação moderna

7.1 Espaço Euclideano: conceitos básicos

1.1 **Def.** O espaço euclideano $\mathbb{R}^3$ é o conjunto de todas as triplas ordenadas de números reais. A tripla $p = (p_1, p_2, p_3)$ é denominada um ponto de $\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial sobre os reais de maneira natural: se $p = (p_1, p_2, p_3)$ e $q = (q_1, q_2, q_3)$ são pontos de $\mathbb{R}^3$, sua soma é o ponto

$$p + q = (p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_3 + q_3)$$

O múltiplo escalar de um ponto $p = (p_1, p_2, p_3)$ por um número a é o ponto

$$ap = (ap_1, ap_2, ap_3) \ .$$

Verifica-se facilmente que essas duas operações satisfazem os axiomas de espaço vetorial. O ponto $0 = (0, 0, 0)$ é denominado origem de $\mathbb{R}^3$
1.2 **Def.** Sejam x, y, z as funções de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tais que, para cada ponto $p = (p_1, p_2, p_3)$,

$$x(p) = p_1 \quad y(p) = p_2 \quad z(p) = p_3 \ .$$

Essas funçõesx, y, z chamam-se funções coordenadas naturais de $\mathbb{R}^3$. Também se usa a notação x_1, x_2, x_3.
Vale, então, a identidade

$$p = (x_1(p), x_2(p), x_3(p))$$

1.3 **Def.** Uma função real f sobre $\mathbb{R}^3$ ($f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) é diferenciável (ou de classe C^∞) se todas as derivadas parciais de f, de todas as ordens, existirem e forem contínuas.

Se f e g são funções reais diferenciáveis, $f + g$ e fg são também diferenciáveis.
Comentário A diferenciação é uma operação local: para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ em $p \in \mathbb{R}^3$ basta saber os valores de f para todos os $q \in \mathbb{R}^3$ suficientemente próximos de p. Por isso a definição acima é excessivamente restritiva. O domínio de f pode ser um aberto que contenha p (e não necessariamente todo o $\mathbb{R}^3$).

7.2 Vetores Tangentes

2.1 **Def.** Um *vetor tangente* v_p de $\mathbb{R}^3$ consiste de dois pontos de $\mathbb{R}^3$: a parte vetorial v e o ponto de aplicação p. v_p é sempre representado pela flexa do ponto p ao ponto $p+v$. É importante ressaltar que dois vetores tangentes, v_p e w_q, são iguais, $v_p = w_q$, se e só se $v = w$ e $p = q$; ou seja, além da igualdade das partes vetoriais, requer-se a igualdade dos pontos de aplicação. Vetores com a mesma parte vetorial e pontos de aplicação diferentes são ditos *paralelos*. Esta conceituação de vetores tangentes é comum na física, onde o ponto de aplicação de uma força é essencial.

2.2 **Def.**Seja p um ponto de $\mathbb{R}^3$. O conjunto $T_p(\mathbb{R}^3)$ de todos os vetores que têm p como ponto de aplicação é chamado de *espaço tangente a* $\mathbb{R}^3$ *em* p.

2.3 **Def.** Um *campo vetorial* V em $\mathbb{R}^3$ é uma função que associa a cada ponto p de $\mathbb{R}^3$ um vetor tangente $V(p)$ a $\mathbb{R}^3$, em p.

Existe uma álgebra natural para campos vetoriais:

$$\begin{aligned}(V+W)(p) &= V(p)+W(p)\\ (fV)(p) &= F(p)V(p)\end{aligned}$$

onde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

2.4 **Def.** Sejam U_1, U_2, U_3 campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$ tais que

$$\begin{aligned}U_1(p) &= (1,0,0)_p\\ U_2(p) &= (0,1,0)_p\\ U_3(p) &= (0,0,1)_p\end{aligned}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^3$. Chamamos U_1, U_2, U_3 de *referencial natural* de $\mathbb{R}^3$. U_i $(i = 1, 2, 3)$ é um conjunto de vetores unitários na direção x_i.

2.5 **Lema** Se V é um campo vetorial em $\mathbb{R}^3$, existem três (e só três) funções reais v_1, v_2, v_3 em $\mathbb{R}^3$ tais que

$$V = v_1U_1 + v_2U_2 + v_3U_3$$

As funções v_1, v_2, v_3 são denominadas *funções coordenadas euclideanas* de V.
Prova $V : p \mapsto V(p)$ vetor tangente. A parte vetorial de $V(p)$ pode ser descrita como $(v_1(p), v_2(p), v_3(p))$ que, ponto a ponto, define as funções v_1, v_2, v_3.

Mas

$$\begin{aligned} V(p) &= (v_1(p), v_2(p), v_3(p)) \\ &= v_1(p)(1,0,0)_p + v_2(p)(0,1,0)_p + v_3(p)(0,0,1)_p \\ &= v_1(p)U_1(p) + v_2(p)U_2(p) + v_3(p)U_3(p) \end{aligned}$$

Logo,

$$V = v_1U_1 + v_2U_2 + v_3U_3$$

Cálculos com campos vetoriais podem sempre ser expressos em termos de suas funções coordenadas euclideanas. Por exemplo, a adição e a multiplicação por uma função são dados por

$$\sum_i v_iU_i + \sum_i w_iU_i = \sum_i (v_i + w_i)U_i$$

$$f\left[\sum_i v_iU_i\right] = \sum_i \left[fv_i\right]U_i$$

Esta última equação significa que, em um ponto arbitrário p, teremos

$$\left\{f\left[\sum_i v_iU_i\right]\right\}(p) = \sum_i \left(f(p)v_i(p)\right)U_i(p)$$

Um campo vetorial V é *diferenciável* se suas funções coordenadas euclideanas forem diferenciáveis.

7.3 Derivadas direcionais

Associada a cada vetor tangente $v_p \in \mathbb{R}^3$ está a reta

$$t \mapsto p + tv$$

Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$, e considere a função

$$t \mapsto f(p + tv)\ ,$$

que é uma função diferenciável na reta real. É claro que a derivada desta função de t, em $t = 0$, nos diz como f varia ao longo da reta que tem a direção de v.

3.1 **Def.** Seja $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ diferenciável, seja v_p um vetor tangente a $\mathbb{R}^3$. O número

$$v_p[f] = \frac{d}{dt}\left(f(p + tv)\right)_{t=0}$$

é a derivada de f em relação a v_p. Outra denominação usada é a de derivada direcional na direção de v_p.
Exemplo:

$$\begin{aligned} f &= x^2yz \\ p &= (1,1,0) \\ v &= (1,0,-3) \\ p+tv &= (1+t,1,-3t) \\ f(p+tv) &= (1+t)^2.1.(-3t) = -3t-6t^2-3t^3 \end{aligned}$$

e então

$$\frac{d}{dt}\left(f(p+tv)\right) = -3-12t-9t^2$$

Para $t=0$,

$$v_p[f] = -3$$

O cálculo de $v_p[f]$ pode ser reduzido ao cálculo das derivadas parciais no ponto p, como mostram os lemas a seguir.

3.2 **Lema** Se $v_p = (v_1, v_2, v_3)$ é um vetor tangente a $\mathbb{R}^3$, então

$$v_p[f] = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

Prova

$$\begin{aligned} f(p+tv) &= f(p_1+tv_1, p_2+tv_2, p_3+tv_3) \\ \frac{d}{dt}(p_i+tv_i) &= v_i \\ v_p[f] &= \frac{d}{dt}\left(f(p+tv)\right)_{t=0} = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)v_i \end{aligned}$$

As principais propriedades dessa derivada direcional são:

3.3 **Teorema** Sejam $f, g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, v_p e w_p vetores tangentes, a e b, números. Então,

$$\begin{aligned} &(1) \quad (av_p + bw_p)[f] = av_p[f] + bw_p[f] \\ &(2) \quad v_p[af+bg] = av_p[f] + bv_p[g] \\ &(3) \quad v_p[fg] = v_p[f].g(p) + f(p).v_p[g] \end{aligned}$$

de demonstração imediata.
As primeiras duas propriedades podem ser sumarizadas assim: $v_p[f]$ é linear em v_p e em f. A terceira é a propriedade de Leibnitz. Todos os tipos de derivação que vamos encontrar têm essa característica: linearidade e Leibnitz.

Dado um campo vetorial V e uma função f, podemos falar na função $V[f]$. De fato, em cada ponto p essa função tem o valor $V_p[f]$, ou seja, a derivada de f em relação ao vetor tangente $V(p)$.

Seja U_1, U_2, U_3 o campo de referenciais naturais em $\mathbb{R}^3$. Lembrando que

$$U_{1\,p} = (1,0,0)_p \tag{239}$$
$$U_{2\,p} = (0,1,0)_p \tag{240}$$
$$U_{3\,p} = (0,0,1)_p \tag{241}$$

temos, evidentemente, que $U_i[f] = \frac{\partial f}{\partial x^i}$.

Por exemplo:

$$U_1(p)[f] = \frac{d}{dt}\left(f(p_1 + t, p_2, p_3)\right)_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^1}(p)$$

3.4 **Corolário**. Sejam V e W campos vetoriais em $\mathbb{R}^3$ e f, g, h funções reais ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$).

1. $(fV + gW)[h] = fV[h] + gW[h]$
2. $V[af + bg] = aV[f] + bV[g]$
3. $V[fg] = V[f].g + fV[g]$

A demonstração é simples. Exemplo:

$$V(p)[fg] = V(p)[f].g(p) + f(p)[g]$$

ou seja:

$$V[fg](p) = V[f].g(p) + fV[g](p)$$

Para simplificar a notação, nem sempre vamos escrever o ponto de aplicação de um vetor v_p.

7.4 Curvas em $\mathbb{R}^3$

4.1 **Definição** Uma curva em $\mathbb{R}^3$ é uma função diferenciável $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ de um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^3$. A função α pode ser escrita como $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Ser diferenciável quer dizerentão que $\alpha_1, \alpha_2, alpha_3$ são diferenciáveis.

4.2 **Exemplo** 1. Reta. É a curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\alpha(t) = p + tq = (p_1 + tq_1, p_2 + tq_2, p_3 + tq_3)$$

com $q \neq 0$, é a reta passando por p na direção q.
2. Hélice. A curva $t \mapsto (a\cos t, a\sin t, 0)$ é um círculo de raio $a > 0$ no plano xy de $\mathbb{R}^3$. Uma hélice é obtida tmando-se a curva

$$t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt)$$

com $a > 0$ e $b \neq 0$.
4.3 **Definição** Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva em $\mathbb{R}^3$ com $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Para cada $t \in I$, o *vetor velocidade* de α em t é o vetor tangente

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}(t), \frac{d\alpha_3}{dt}(t)\right)_{\alpha(t)}$$

no ponto $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$.
4.4 **Definição** Seja $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ uma curva. Se $h : J \to I$ é uma função diferenciável em um intervalo aberto J, então a função composta

$$\beta = \alpha(h) : J \to \mathbb{R}^3$$

é uma curva denominada *reparametrização* de α por h.

4.5 **Lema** Se β é uma reparametrização de α por h, então

$$\beta'(s) = \frac{dh}{ds}(s).\alpha'(h(s))$$

Dem.: Escrevendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, temos

$$\beta(s) = \alpha(h(s)) = (\alpha_1(h(s)), \alpha_2(h(s)), \alpha_3(h(s)))$$

Mas $g(f(s))' = g'(f(s)).f'(s)$, logo,

$$\beta'(s) = (\alpha_1'(h(s)).h'(s), \alpha_2'(h(s).h'(s), \alpha_3'(h(s).h'(s)$$

$$= h'(s).\,(\alpha_1'(h(s)), \alpha_2'(h(s)), \alpha_3'(h(s)))$$

$$\beta'(s) = \frac{dh}{ds}(s).\alpha'(h(s))$$

quod erat demonstrandum.

4.6 **Lema**Seja α uma curva em $\mathbb{R}^3$ e seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$. Então,

$$\alpha'(t)[f] = \frac{df(\alpha)}{dt}(t)$$

Prova: como

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\alpha_3}{dt}\right)_{\alpha(t)}$$

e como vimos que

$$\vec{v}_p[f] = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})$$

temos

$$\alpha'(t)[f] = \alpha'(t)_{\alpha(t)}[f] = \sum_i \frac{d\alpha_i}{dt}(t)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t))$$

Ora, $f(\alpha)$ pode ser escrita $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Logo,

$$\frac{df(\alpha)}{dt}(t) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t))\frac{d\alpha_i}{dt}(t)$$

Portanto,

$$\alpha'(t)[f] = \frac{sf(\alpha)}{dt}(t)$$

Comentário:$\alpha'(t)[f]$ é a taxa de variação de f ao longo da linha por $\alpha(t)$, na direção $\alpha'(t)$. O lema mostra que esta taxa é a mesma que a da variação de f ao longo da curva α.

7.5 1-Formas

Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Elementarmente usa-se definir a diferencial de f como

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

sem esclarecer o que esta expressão formal significa. A seguir daremos um significado preciso à noção de diferencial de uma função.

5.1 **Definição** Uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$ é uma função real ϕ (isto é, a valores reais) sobre o conjunto dos vetores tangentes a $\mathbb{R}^3$, tal que ϕ é linear em cada ponto, isto é,

$$\phi(av + bw) = a\phi(v) + b\phi(w)$$

para quaisquer números a, b e quaisquer vetores tangentes $\vec{v}, w$ em um ponto arbitrário de $\mathbb{R}^3$. Assim, dada ϕ, $\phi(v$ é um número. No ponto $\vec{p}$, ponto de aplicação de v, a função

$$\phi_p : T_p(\mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$$

é linear. Então, em cada ponto $\vec{p}$, ϕ_p é um elemento do espaço dual de $T_p(\mathbb{R}^3)$. Neste sentido, a noção de 1-forma é dual à de campo vetorial.

A soma de 1-formas ϕ e ψ é definida ponto-a-ponto:

$$(\phi + \psi)(v) = \phi(v) + \psi(v)$$

para todo v em $T_p(\mathbb{R}^3)$. De modo semelhante, se f é uma função real em $\mathbb{R}^3$ e ϕ é uma 1-forma, então a 1-forma $f\phi$ é definida assim:

$$(f\phi)(v_p) = f(\vec{p})\phi(v_p)$$

para todos os vetores tangentes v_p.

Daí decorre uma maneira natural para calcular a ação de uma 1-forma ϕ sobre um campo vetorial V, dando uma função real $\phi(V)$:

$$(\phi(V))\,(\vec{p}) = \phi\,(V(\vec{p}))$$

Pode-se então interpretar também uma 1-forma como uma máquina que converte campos vetoriais em funções reais. Diz-se que ϕ é diferenciável quando $\phi(V)$ é diferenciável para qualquer V diferenciável. A partir de agora vamos sempre supor que as 1-formas, bem como os campos vetoriais, são diferenciáveis. As seguintes propriedades da linearidade valem:

$$\begin{aligned} \phi(fV + gW) &= f\phi(V) + g\phi(W) \\ (f\Phi + g\psi)(V) &= f\phi(V) + g\psi(V) \end{aligned}$$

onde f e g são funções.

Usando a noção de derivada direcional vamos introduzir agora uma maneira muito importante de construir !-formas a partir de funções.

5.2 **Definição** Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciável. A <u>diferencial</u> df de f é uma 1-forma tal que

$$df(v_p) = v_p[f]$$

para todos os vetores tangentes v_p.

<u>Comentário</u>: A df assim definida é efetivamente uma 1-forma, pois é uma função a valores reais sobre os vetores tangentes e que, pela parte (1) do

teorema 3.3, é linear em cada ponto $\vec{p}$. Note-se que df sabe como f varia em todas as direções de $\mathbb{R}^3$, o que dá uma medida de sua potência.

5.3 **Exemplos** 1-formas em $\mathbb{R}^3$.
(1) As diferenciais dx_1,dx_2,dx_3 das funções coordenadas naturais.

$$dx_i(v_p) = v_p[x_i] = \sum_j v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\vec{p}) = \sum_j v_j \delta_{ij} = v_i$$

Assim, o valor de dx_i em um vetor tangente arbitrário v_p é a i-ésima componente v_i de sua parte vetorial.
(2) A 1-forma $\psi = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3$

$$\begin{aligned} \psi(v_p) &= f_1(\vec{p})dx_1(v_p) + f_2(\vec{p})dx_2(v_p) + f_3 dx_3(v_p) \\ &= f_1(\vec{p})v_1 + f_2(\vec{p})v_2 + f_3(\vec{p})v_3 \\ \psi(v_p) &= \sum f_i(\vec{p})v_i \end{aligned}$$

(3) Em particular, tomando como vetores os U_{ip}, temos

$$dx^j(U_{ip}) = \delta_i^j$$

e, assim, dx_1,dx_2,dx_3 formam a base dual de U_1, U_2,U_3, que é a base natural de $\mathbb{R}^3$.

5.4 **Lema** Se ϕ é uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$, então $\phi = \sum f_i dx_i$, onde $f_i = \phi(U_i)$. Essas funções f_1, f_2, f_3, são chamadas funções coordenadas euclideanas de ϕ.
Dem.: Um vetor tangente genérico pode ser escrito

$$v_p = \sum v_i U_i(\vec{p})$$

logo,

$$\phi(v_p) = \phi(\sum v_i U_i(\vec{p})) = \sum v_i \phi(U_i(\vec{p})) = \sum v_i f_i(\vec{p})$$

onde denotamos $\phi(U_i(\vec{p}))$ por $f_i(\vec{p})$. Mas

$$\left(\sum f_i dx_i\right)(v_p) = \sum_i f_i(\vec{p})dx_i(v_p) = \sum_i f_i(\vec{p})v_i$$

logo, $\phi = \sum_i f_i dx_i$, onde $f_i(\vec{p}) = \phi(U_i(\vec{p}))$.

Este lema mostra que uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$ não é senão uma expressão $fdx + gdy + hdz$, onde os dx_i são precisamente definidos.

5.5 **Corolário**: Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$. Então,

$$df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Dem.:

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i(v_p) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i$$

Ora,

$$df(v_p) = v_p[f] = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) v_i$$

o que demonstra o corolário.

7.6 Formas diferenciais

As 1-formas são membros de uma família maior, a das formas diferenciais. Existem 2-formas, 3-formas, etc. De uma maneira informal, uma forma diferencial é uma soma de termos da forma $fdx_i dx_j$, ou $gdx_i dx_j dx_k$, onde o produto das diferenciais satisfaz a regra de alternação:

$$dx_i dx_j = -dx_j dx_i \quad (1 \leq i \ , j \leq 3)$$

Como conseqüência desta regra, temos

$$dx_i dx_i = 0$$

Catálogo:

0-forma: f (função diferenciável)
1-forma: $fdx + gdy + hdz$
2-forma: $fdxdy + gdxdz + hdydz$
3-forma: $fdxdydz$

Em $\mathbb{R}^3$ não há outros tipos de formas. Vamos introduzir operações envolvendo formas. Já sabemos somar 1-formas:

$$\sum_i f_i dx_i + \sum_i g_i dx_i = \sum_i (f_i + g_i) dx^i$$

Adições correspondentes existem para 2-formas e 3-formas.
Multiplicação de formas: se faz usando a regra da alternação. Para ressaltar as propriedades desse produto especial, vamos passar a denotar o produto $dxdy$, por exemplo, por $dx \wedge dy$.

Exemplo
(1) Sejam

$$\begin{aligned} \phi &= xdx - ydy \\ \psi &= zdx + xdz \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \phi \wedge \psi &= (xdx - ydy) \wedge (zdx + xdz) \\ &= xzdx \wedge dx + x^2 dx \wedge dz - yzdy \wedge dx - yxdy \wedge dz \\ &= x^2 dx \wedge dz - yzdy \wedge dx - yxdy \wedge dz \\ &= x^2 dx \wedge dz + yzdx \wedge dy - yxdy \wedge dz \end{aligned}$$

De uma maneira geral, o produto de duas 1-formas é uma 2-forma.

(2) Sejam ϕ e ψ como acima, e $\theta = zdy$. Então

$$\begin{aligned} \theta \wedge \phi \wedge \psi &= zdy \wedge (x^2 dx \wedge dz + yzdx \wedge dy - yxdy \wedge dz) \\ &= x^2 zdy \wedge dx \wedge dz + z^2 ydy \wedge dx \wedge dy - xyzdy \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Mas $dy \wedge dx \wedge dy = -dy \wedge dy \wedge dx = 0$ e $dy \wedge dy \wedge dz = 0$ Logo,

$$\theta \wedge \phi \wedge \psi = -x^2 zdx \wedge dy \wedge dz$$

Seja ϕ como acima, e seja η a 2-forma $ydx \wedge dz + xdy \wedge dz$. Temos

$$\begin{aligned} \phi \wedge \eta &= (xdx - ydy) \wedge (ydx \wedge dz + xdy \wedge dz) \\ &= yxdx \wedge dx \wedge dz + x^2 dx \wedge dy \wedge dz - y^2 dy \wedge dx \wedge dz - yxdy \wedge dy \wedge dz \\ &= x^2 dx \wedge dy \wedge dz - y^2 dy \wedge dx \wedge dz \\ &= (x^2 + y^2) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

6.2 **Lema** Se ϕ e ψ são 1-formas, então

$$\phi \wedge \psi = -\psi \wedge \phi$$

Dem: Trivial.

6.3 **Definição** Se $\phi = \sum_i f_i dx^i$ é uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$, a derivada exterior de ϕ é a 2-forma

$$d\phi = \sum_i df_i \wedge dx^i$$

onde df_i é a diferencial da função f_i.

Seja $\phi = f_1 dx_1 + f_2 dx^2 + f_3 v dx^3$. Então,

$$d\phi = df_1 \wedge dx^1 + df_2 \wedge dx^2 + df_3 \wedge dx^3$$

Mas,

$$\begin{aligned} df_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f_1}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x^3}dx^3 \\ df_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x^3}dx^3 \\ df_3 &= \frac{\partial f_3}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f_3}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f_3}{\partial x^3}dx^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\phi &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f_1}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f_1}{\partial x^3}dx^3\right) \wedge dx^1 + \\ &+ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f_2}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f_2}{\partial x^3}dx^3\right) \wedge dx^2 + \\ &+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^1}dx^1 + \frac{\partial f_3}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial f_3}{\partial x^3}dx^3\right) \wedge dx^3 \end{aligned}$$

Expandindo e levando em conta as regras do produto exterior, temos

$$d\phi = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^3$$

6.4 **Teorema** Sejam f e g funções, ϕ e ψ 1-formas.
(1) $d(fg) = (df)g + f(dg)$
(2)$d(fg) = df \wedge \phi + f d\phi$
(3)$d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi - \phi \wedge d\psi$

Dem: (1) e (2) são muito simples e ficam como exercícios.
(3) É suficiente provar a fórmula para $\phi = fd\mu$ e $\psi = gd\nu$, onde μ e ν são quaisquer das coordenadas x_1, x_2, x_3. Por exemplo, $\phi = fdx$, $\psi = gdy$. Então,

$$\begin{aligned} d(\phi \wedge \psi) &= d(fgdx \wedge dy) \\ &= \frac{\partial(fg)}{\partial x} dx \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial(fg)}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial(fg)}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\ &= \frac{\partial(fg)}{\partial z} dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial z} g + f \frac{\partial g}{\partial z}\right] dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} d\phi \wedge \psi &= \left(\frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z} dz \wedge dx\right) \wedge gdy \\ &= \frac{\partial f}{\partial z} gdz \wedge dx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi \wedge d\psi &= fdx \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz \wedge dy\right) \\ &= f \frac{\partial g}{\partial z} dx \wedge dz \wedge dy \\ &= -f \frac{\partial g}{\partial z} dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

o que prova (3).

7.7 Aplicações, ou mapeamentos

Nesta seção discutimos funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. A observação fundamental sobre a função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é que ela pode ser completamente descrita por m funções de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

7.1 **Definição** Dada uma função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sejam $f_1, \ldots f_m$ funções reais definidas em $\mathbb{R}^n$, tais que

$$F(\vec{p}) = \left(f_1(\vec{P}), f_2(\vec{p}), ..., f_m(\vec{p})\right)$$

para todo $\vec{p}$ de $\mathbb{R}^n$. Essas funções chamam-se funções coordenadas euclideanas de F, e é costume escrever-se: $F = (f_1, f_2, ..., f_m)$.

A função F é diferenciável se suas funções coordenadas o forem. Uma função diferenciável $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é chamada de mapeamento de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. Note que $f_i = x_i \circ F$.

7.2 **Definição** Se $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ é uma curva em $\mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é um mapeamento, então a função composta $\beta = F(\alpha) : I \to \mathbb{R}^m$ é uma curva em $\mathbb{R}^m$ denominada imagem de α sob F.

7.3 **Exemplo**
(1) Considere o mapeamento $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$F = (x - y, x + y, 2z)$$

ou, mais precisamente,

$$F : (x, y, z) \mapsto (x - y, x + y, 2z).$$

Este mapeamento é muito simples porque é linear. Neste caso é sabido que F é completamente determinado pelos seus valores em três pontos linearmente independentes, como, por exemplo,

$$\begin{aligned} \mathbf{u_1} &= (1, 0, 0) \\ \mathbf{u_2} &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{u_3} &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

(2) O mapeamento $F : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ tal que

$$F(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$$

onde u e v são as funções coordenadas de $\mathbb{R}^2$. Para analisar este mapeamento, vamos examinar o seu efeito sobre a curva

$$\alpha(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Esta curva descreve, em sentido antihorário, um arco de cí rculo de raio r com centro na origem. A curva imagem é

$$\begin{aligned} \beta(t) &= F(\alpha(t)) = F(r \cos t, r \sin t) \\ &= \left(r^2 \cos^2 t - r^2 \sin^2 t, 2r^2 \cos t \sin t\right) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\beta(t) = \left(r^2 \cos 2t, r^2 \sin 2t\right) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Esta curva descreve dois arcos de cí rculo, em sentido antihorário, em torno da origem e de raio r^2.

Em linhas gerais, o cálculo diferencial aproxima objetos contí nuos por objetos lineares. Nesta linha, dado um mapeamento $F : \mathbb{R}^n \to$, vamos definir uma aproximação linear para ele, perto de um ponto $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$.

É possí vel atingir todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ através de retas $\alpha(t) = \vec{p} + tv$, partindo de $\vec{p}$ e escolhendo adequadamente v e t. Da mesma forma $\mathbb{R}^n$ pode ser "varrido" pelas imagens de α por F, ou seja,

$$\beta(t) = F(\vec{P} + tv)$$

começando em $F(\vec{p})$. Vamos aproximar F nas vizinhanças de $\vec{p}$ pelo mapeamento F_*, que leva cada velocidade inicial $\alpha'(0) = v_p$ na velocidade inicial $\beta'(0)$.

7.4 **Definição** Seja $F : \mathbb{R}^n \to$ um mapeamento. Seja v_p um vetor tangente a $\mathbb{R}^n$ em $\vec{p}$, e denotemos por $F_*(v)$ a velocidade inicial da curva

$$t \mapsto F(\vec{p} + tv)$$

A função resultante F_* leva vetores tangentes a $\mathbb{R}^n$ em vetores tangentes a , e é chamada mapeamento tangente de F.

7.5 **Proposição** Seja $F = (f_1, f_2, ...f_m)$ um mapeamento de $\mathbb{R}^n$ em . Se v é um vetor tangente a $\mathbb{R}^n$ em $\vec{p}$, então

$$F_*(v) = (v[f_1], ..., v[f_m]) \quad em \;\; F(\vec{p})$$

Prova: Vamos tomar $m = 3$ para fixar as idéias. Então

$$\beta(t) = F(\vec{p} + tv) = (f_1(\vec{p} + tv), f_2(\vec{p} + tv), f_3(\vec{p} + tv))$$

Por definição, $F_*(v) = \beta'(0)$. Para obter $\beta'(0)$, derivamos, em $t = 0$, as funções coordenadas de β. Mas

$$\frac{d}{dt}\left(f_i(\vec{p} + tv)\right)_{t=0} = v[f_i]$$

Logo,

$$F_*(v) = (v[f_1], v[f_2], v[f_3])_{\beta=0}$$

e $\beta(0) = F(\vec{p})$.

7.6 **Corolário** Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow$ é um mapeamento, então em cada ponto $\vec{p}$ de $\mathbb{R}^n$, o mapeamento tangente

$$F_{*\,p} : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_{F(p)}()$$

é uma transformação linear.
Prova: Temos que mostrar que, para v, w, a, b arbitrários,

$$F_*(av + bw) = aF_*(v) + bF_*(w)$$

$$\begin{aligned} F_8(av + bw) &= ((av + bw)[f_1], ...(av + bw)[f_m]) \\ &= (av[f_1] + bw[f_1], ..., av[f_m] + bw[f_m]) \\ &= a\,(v[f_1], ...v[f_m]) + b\,(w[f_1], ..., w[f_m]) \\ &= aF_*(v) + bF_*(w) \end{aligned}$$

De fato, o mapeamento tangente $F_{*\,p}$ em $\vec{p}$ é a transformação linear que melhor aproxima F nas vizinhanças de $\vec{p}$.

7.7 **Corolário** Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow$ um mapeamento. Se $\beta = F(\alpha)$ é a imagem da curva α em $\mathbb{R}^n$, então $\beta' = F_*(\alpha')$.
Prova:

$$\begin{aligned} m &= 3 \\ F &= F(\alpha) = (f_1(\alpha), f_2(\alpha), f_3(\alpha)) \\ F_*(\alpha') &= (\alpha'[f_1], \alpha'[f_2], \alpha'[f_3]) \end{aligned}$$

Mas

$$\alpha'[f_i] = \frac{df_i(\alpha)}{dt}\ ,$$

logo,

$$F_*(\alpha') = \left(\frac{df_1(\alpha)}{dt}(t), \frac{df_2(\alpha)}{dt}(t), \frac{df_3(\alpha)}{dt}(t)\right)_{\beta(t)} = \beta'(t)$$

Sejam $\{U_j\}$, $(1 \leq j \leq n)$ e $\{\overline{U}_i\}$, $(1 \leq i \leq m)$ os referenciais naturais de $\mathbb{R}^n$ e respectivamente. Então,

7.8 **Corolário** Se $F = (f_1, ..., f_m)$ é um mapeamento de $\mathbb{R}^n$ em , então

$$F_* \left(U_j(\vec{p})\right) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{p}) \overline{U}_i \left(F(\vec{p})\right) \quad (1 \leq j \leq n)$$

Dem: Imediata, lembrando que $U_i[f_j] = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

Seja V um espaç o vetorial, com base $\{e_i\}$. Seja W um outro espaç o vetorial, com base $\{f_i\}$. Seja $T : V \to W$ linear. Chama-se elementos de matriz de T em relação às bases $\{e_i\}$ e $\{f_i\}$ os números T_{ji} na equação

$$TE_i = \sum_j T_{ji} f_j$$

Logo, o Corolário 7.8 nos diz que, se $F(f_1, ..., f_m)$, os elementos de matriz de f_* em relação aos referenciais naturais de $\mathbb{R}^n$ e são, no ponto $\vec{p}$, os números $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(\vec{p})$. Ou seja, a matriz que representa a transformação linear F_* nessas bases é a matriz jacobiana da função F. Isto nos sugere outro nome para F_*: derivada de F.

7.9 **Definição** Um mapeamento $F : \mathbb{R}^n \to$ é regular se, para todo $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$, o mapeamento tangente F_{*p} for $(1-1)$ (injetor).[11]

Como mapeamentos tangentes são lineares, segue diretamente da álgebra linear que as seguintes condições são equivalentes:
(1) F_{*p} é injetora.
(2) $F_*(v_p) = 0 \Rightarrow v_p = 0$
(3) A matriz jacobiana de F em $\vec{p}$ tem posto n (que é a dimensão de $\mathbb{R}^n$).

A seguinte propriedade de transformações lineares $T : V \to W$ será útil:se os espaç os vetoriais V e W têm a mesma dimensão, então T é injetora se e só se ela for sobrejetora.

Um mapeamento que tem um mapeamento inverso é chamado de difeomorfismo. Lembre-se de que estamos exigindo de um mapeamento que seja diferenciável. Quando considerarmos aplicações mais gerais, um difeomorfismo será uma aplicação diferenciável que possui uma inversa também diferenciável.

7.10 **Teorema**: Seja $F : \mathbb{R}^n \to$ um mapeamento entre espaç os euclideanos de mesma dimensão. Se F_{*p} é injetora em um ponto $\vec{p}$, existe um aberto $\mathcal{A}$

[11] Uma aplicação é injetora se $F(x) = F(y) \Rightarrow x = y$.

contendo $\vec{p}$ tal que a restrição de F a $\mathcal{A}$ é um difeomorfismo de $\mathcal{A}$ sobre um aberto $\mathcal{B}$.

Este teorema, de demonstração difícil, é chamado de teorema da função inversa.

7.11 **Definição** Funções tangentes.

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto; x_0 um ponto de A e

$$f, g : A \to$$

contínuas em A. Diz-se que f e g são tangentes em x_0 se
$(1) f(x_0) = g(x_0)$
$(2) lim_{x \to x_0; x \neq x_0} \frac{\|f(x)-g(x)\|}{\|x-x_0\|} = 0$
onde $\|z\|$ é a norma do vetor z (por exemplo, a norma euclideana).

O nome se justifica. Tomemos, para simplificar, o caso em que $n = m$. Então o limite da definição diz que, se f e g são tangentes em x_0, teremos, próximo a x_0,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0)a \\ g(x) &= g(x_0) + (x - x_0)b \end{aligned}$$

e, para que $\frac{\|f(x)-g(x)\|}{\|x-x_0\|} = 0$, é preciso que $a = b$. Ou seja, nas vizinhanças de x_0, as funções tangentes diferem só a partir da segunda ordem em $\|x - x_0\|$.

7.12 **Proposição** Suponhamos que, dentre as funções tangentes, em x_0, à função f, existam duas funções lineares, u_1 e u_2. Isto é, suponhamos que

$$\begin{aligned} x &\mapsto f(x_0) + u_1(x - x_0) \\ x &\mapsto f(x_0) + u_2(x - x_0) \end{aligned}$$

sejam tangentes a f em x_0. Então, $u_1 = u_2$.
Prova:
$(1) u_1$ é tangente a u_2 (trivial).
(2) Temos, então,

$$\begin{aligned} lim_{x \to x_0;\, x \neq x_0} \frac{\|f(x_0) + u_1(x - x_0) - f(x_0) - u_2(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} &= 0 \\ lim_{x \to x_0;\, x \neq x_0} \frac{\|(u_1 - u_2)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} &= 0 \end{aligned}$$

Introduzo $y = x - x_0$ e $v = u_1 - u_2$. Então,

$$lim_{y \to 0;\, y \neq 0} \frac{\|v(y)\|}{\|y\|} = 0$$

Isto quer dizer que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $r > 0$ tal que, se $\|y\| \leq r$,

$$\|v(y)\| < \epsilon\|y\| \tag{242}$$

Considere a seguinte escolha de y:

$$y = r\frac{x}{\|x\|}$$

onde x é um vetor não-nulo qualquer. Temos

$$\begin{aligned} \|y\| &= \frac{r}{\|x\|}\|x\| = r \leq r \\ v(y) &= \frac{r}{\|x\|}v(x) \end{aligned}$$

e a Eq.(242) vale. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{r}{\|x\|}\|v(x)\| &< \epsilon r \\ \|v(x)\| &< \epsilon\|x\| \end{aligned}$$

ou ainda

$$\frac{\|v(x)\|}{\|x\|} < \epsilon$$

para ϵ arbitrário e para todo $x \neq 0$. Para $x = 0$, temos $v(x) = 0$. Para x não-nulo, a desigualdade de cima exige $v(x) = 0$.[12] Logo, $v(x) = 0$ para todo x. Segue que $v = 0$, ou, $u_1 = u_2$. Em conseqüência a aplicação linear tangente a uma função contínua em x_0, se existir, é única.

7.14 **Definição** Dizemos que uma aplicação contínua f de $A \subset \mathbb{R}^n$ em é diferenciável no ponto $x_0 \in A$ se existir uma aplicação linear u de $\mathbb{R}^n \to$ tal que $x \mapsto f(x_0) + u(t = t_0)$ seja tangente a f em x_0. Acabamos de ver que esse mapeamento, quando existe, é único. u é denominado derivada de f no ponto x_0, e é denotado por $f'(x_0)$ ou $Df(x_0)$.

Exemplos:
1.A aplicação $(x, y) \mapsto x$, de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ é diferenciável. Por que? Qual é a sua

[12]Pois o primeiro membro é menor do que qualquer ϵ, logo é zero. Mas o denominador é não-nulo, logo o numerador tem de ser zero.

diferencial?
A função pode ser escrita $f(x,y) = x$. Ela é linear, pois

$$\begin{aligned} f[(x,y)+(\overline{x},\overline{y})] &= f[(x+\overline{x},y+\overline{y})] = x+\overline{x} = f(x,y)+f(\overline{x},\overline{y}) \\ f[\lambda(x,y)] &= f[(\lambda x,\lambda y)] = \lambda x = \lambda f(x,y) \end{aligned}$$

Como f é linear, ela coincide com a derivada. Então, $Df = f$.
$2.(x,y) \mapsto (x^2,y^2)$. Determinar a diferencial.

$$\begin{aligned} \| \left((x+h)^2,(y+k)^2\right) - (x^2,y^2) - u(h,k)\| &= \\ \|(x^2+2hx+h^2,y^2+2kx+k^2) - (x^2,y^2) - u(h,k)\| = &= \\ \|(2hx+h^2,2ky+k^2) - u(h,k)\| \end{aligned}$$

Para ser mais explí cito, vou denotar u por $u_{(x,y)}$. Considere a aplicação

$$u_{(x,y)}.(h,k) = (2xh,2yk)$$

Então temos

$$\|(2hx+h^2,2ky+k^2) - (2xh,2yk)\| = \|(h^2,k^2)\| = \sqrt{h^4+k^4}$$

Para que $u_{(x,y)}$ seja a derivada de f em (x,y) devemos ter

$$\|f(x+h,y+k) - f(x,y) - u_{(x,y)}(h,k)\| \leq \epsilon\sqrt{h^2+k^2}$$

ou seja, que

$$\sqrt{H^4+k^4} \leq \sqrt{h^2+k^2}$$

nolimite em que $\sqrt{h^2+k^2}$ é suficientemente pequeno. Isto é claramente possível, pois, para h e k suficientemente pequenos,

$$\sqrt{h^4+k^4} < \sqrt{h^2+k^2}$$

Resta verificar, o que é muito simples e pode ser feito pelo leitor, que $u_{(x,y)}$ é linear. Uma vez que $u_{(x,y)}.(h,k) = (2xh,2yk)$ é linear, podemos calcular seus elementos de matriz. Estes são obtidos aplicando $u_{(x,y)}$ aos vetores de base de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} u_{(x,y)}(1,0) &= 2x \\ u_{(x,y)}(0,1) &= 2y \end{aligned}$$

Note-se que $f(x,y) = (x^2,y^2) = (f_1(x,y),f_2(x,y))$, logo,

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= x^2 \\ f_2(x,y) &= y^2 \end{aligned}$$

The partial derivatives of f_1 and f_2 are given by

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} &= 2y\end{aligned}$$

Como podemos escrever

$$\begin{aligned}u_{(x,y)}.(1,0) &= 2x(1,0) + 0(0,1) \\ u_{(x,y)}.(0,1) &= 0(1,0) + 2y(0,1)\end{aligned}$$

segue, usando os valores das derivadas parciais, que

$$\begin{aligned}u_{(x,y)}(1,0) &= \frac{\partial f_1}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,1) \\ u_{(x,y)}(0,1) &= \frac{\partial f_2}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,1)\end{aligned}$$

de onde fica claro que as derivadas parciais são os elementos de matriz de $u_{(x,y)}$.

3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $x \mapsto e^x$

$$\begin{aligned}\|f(x+h) - f(x) - u_x.h\| &= \|e^{x+h} - e^x - u_x.h\| \\ &= \|e^x(1+h) - e^x - u_x.h\| \\ &= \|e^x + he^x - e^x - u_x.h\| \\ &= \|he^x - u_x.h\|\end{aligned}$$

Para que isto se anule devemos ter

$$u_x.h = e^x.h$$

ou seja, a derivada de e^x é a função linear

$$h \mapsto e^x.h$$

Normalmente dizemos que a derivada da função $x \mapsto e^x$ no ponto x é o número e^x. Isto não é inconsistente. De fato, no espaço vetorial $\mathbb{R}$, de uma

dimensão, seja U_1 o vetor da base natural (neste caso, U_1 é o número real 1!), e T uma aplicação linear qualquer. Seja $v = vU_1$ um vetor de $\mathbb{R}$. Denotemos $T(U_1)$ por f. Temos

$$\begin{aligned} T(v) &= T(vU_1) = vT(U_1) = vf = vfU_1 = fvU_1 = fv \\ T(w) &= T(wU_1) = wT(U_1) = wf = wfU_1 = fwU_1 = fw \end{aligned}$$

ou seja, uma aplicação linear $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ consiste sempre em multiplicar o vetor sobre o qual ela atua por um número, característico da aplicação, podendo-se então identificar cada aplicação linear com um número. Na análise clássica chama-se a esse número de derivada.

7.15 **Continuidade de uma aplicação linear** Sejam E e F espaços vetoriais com normas definidas e u uma aplicação linear de E em F. Afim de que u seja contínua, é necessário e suficiente que exista $a > 0$ tal que, para todo $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq a\|x\|$$

Dem;Elon Lages Lima, *Análise Matemática II*

7.16 **Teorema** Se a aplicação contínua f de $A \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é diferenciável no ponto $x_0 \in A$, a derivada $f'(x_0)$ é uma aplicação linear contínua de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Dem:A continuidade de f significa que, dado $\epsilon > 0$, existe $r \in [0, 1]$ tal que

$$\|t\| \leq \Rightarrow \|f(x_0 + t) - f(x_0)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

A diferenciabilidade em x_0 exige que, nas mesmas condições,

$$\|f(x_0 + t) - f(x_0) - u(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2}\|t\|$$

Ora,

$$\begin{aligned} \|u(t)\| = \|u(t) - f(x_0 + t) + f(x_0) + f(x_0 + t) - f(x_0)\| &\leq \\ \leq \|f(x_0 + t) - f(x_0) - u(t)\| + \|f(x_0 + t) - f(x_0)\| & \end{aligned}$$

logo,

$$\|u(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2}\|t\| + \frac{\epsilon}{2}$$

e, tomando o máximo $\|t\|$,

$$\|u(t)\| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}$$

Conseqüentemente,

$$\|t\| \leq r \Rightarrow \|u(t)\| \leq \epsilon$$

Tomando $t = r\frac{x}{\|x\|}$, com $x \neq 0$ qualquer, temos $\|t\| = r \leq r$. Logo, $\|u(t)\| \leq \epsilon$. Mas

$$\|u(t)\| = \|u\left(\frac{rx}{\|x\|}\right)\| = \frac{r}{\|x\|}\|u(x)\| \leq \epsilon$$

Logo,

$$\|u(x)\| \leq \frac{\epsilon}{r}\|x\|$$

para todo x. A função u é, então, contínua.

7.17 **Teorema** A regra da cadeia.

Sejam E,F,G três espaços vetoriais normados, A uma vizinhança aberta de $x_0 \in E$, f uma aplicação contínua de A em F, $y_0 = f(x_0)$, B uma vizinhança aberta de y_0 em F, g uma aplicação contínua de B em G. Então, se f é diferenciável em x_0 e g é diferenciável em y_0, a aplicação $h = g \circ f$ é diferenciável em x_0, e se tem

$$h'(x_0) = g'(y_0) \circ f'(x_0)$$

Dem:Too boring inequality juggling! (Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Parágrafo (8.2.1), pg.151.)[17]

Referências

[1] M. Spivak, *Differential Calculus on Manifolds*

[2] R. Buck, *Advanced Calculus*

[3] W. Fleming, *Functions of Several Variables*

[4] J. C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, Dover, New York.

[5] P.A.M. Dirac, *Principles of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press.

[6] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, tradução inglesa de Andrew Motte.Great Books of the Encyclopaedia Britannica.

[7] H. Jeffreys, B. Jeffreys, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge, 1972.

[8] J. Marsden, A. Tromba, *Vector Calculus*, Freeman.

[9] Bishop, Golberg,*Tensor Analysis on Manifolds*, Dover.

[10] K. Janich, *Vector Analysis*, Springer.

[11] W.K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, New York, 1970.

[12] D.H. Kobe, Am. J. Phys. **54**, 552(1985).

[13] H. Weyl, *The Classical Groups*, Princeton.

[14] H.v. Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen*, Crelles J. **55**,25(1858).

[15] A. Sommerfeld, *Mechanics of Deformable Bodies* New York (1959).

[16] R. Aldrovandi, J.G. Pereira, *An Introduction to Geometrical Physics*, World Scientific (1995).

[17] J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, 1969.