Introdução aos tensores

Henrique Fleming

13-11-2001

Estas notas são uma introdução aos tensores orientada para físicos. Utiliza-se o método clássico, centrado nas propriedades de transformação das componentes do tensor. A vantagem dessa abordagem é que é mais elementar, isto é, exige menos preparação . A desvantagem é que é menos "geométrica", ou seja, menos visualizável. A abordagem moderna, que não faz uso de componentes, é conquista relativamente recente, devendo-se principalmente ao matemático francês Élie Cartan e sua escola. Um físico teórico moderno deve conhecer ambas as versões. No entanto, parece-me que ainda se deve iniciar pelo método das componentes, pois a maioria dos textos sobre relatividade geral usa esse método. Para um estudo detalhado do método clássico a referência melhor é provavelmente ([1]), seguida de uma leitura do grande clássico de Hermann Weyl, ([2]). Para o método moderno recomendo ([3]) ou ([4]).

1 Mudanças de base

Sejam S $(\{\vec{e}_i\})$ e S' $(\{\vec{e}'_i\})$ duas bases ortonormais do espaço usual (R^3 como espaço vetorial, com o produto escalar usual). Cada vetor de S' pode ser expandido na base S. Denotamos essa expansão assim:

$$\vec{e}'_i = a_{ji}\vec{e}_j \tag{1}$$

Naturalmente temos, também, a expansão

$$\vec{e}_j = b_{lj}\vec{e}'_l \tag{2}$$

Combinando as duas, obtemos

$$\vec{e}'_i = a_{ji}\vec{e}_j = a_{ji}b_{lj}\vec{e}'_l \tag{3}$$

de onde segue que

$$a_{ji}b_{lj} = \delta_{il} \tag{4}$$

Seja A a matriz tal que $A_{ij} = a_{ij}$ e B tal que $B_{il} = b_{il}$. Então a equação anterior se escreve

$$A_{ji}B_{lj} = (BA)_{li} = \delta_{li} \tag{5}$$

Analogamente,
$$\vec{e}_i = b_{li}\vec{e}'_l = b_{li}a_{jl}\vec{e}_j \tag{6}$$
Logo,
$$b_{li}a_{jl} = \delta_{ij} \tag{7}$$
ou
$$(AB)_{ji} = \delta_{ji} \tag{8}$$
Isto mostra que $AB = BA = 1$, ou seja, que as matrizes A e B são inversas.
$$B = A^{-1} \tag{9}$$

1.1 Transformações das componentes de um vetor

Seja $\vec{x} = x_i\vec{e}_i = x'_j\vec{e}'_j$ um vetor qualquer. Temos
$$x'_j\vec{e}'_j = x_i\vec{e}_i = x_i b_{li}\vec{e}'_l \tag{10}$$
ou, o que é o mesmo,
$$x'_l\vec{e}'_l = x_i b_{li}\vec{e}'_l \tag{11}$$
de onde segue que
$$x'_l = b_{li}x_i \tag{12}$$
Inversamente,
$$x'_l\vec{e}'_l = x'_l a_{ml}\vec{e}_m = x_m\vec{e}_m \tag{13}$$
de onde sai que
$$x_m = a_{ml}x'_l \tag{14}$$
ou, resumindo,
$$\begin{aligned} x'_l &= b_{li}x_i \\ x_m &= a_{ml}x'_l \end{aligned} \tag{15}$$
Note-se que
$$\begin{aligned} x'_l x'_l &= b_{li}x_i b_{lm}x_m = b_{li}b_{lm}x_i x_m \\ &= ({}^t b)_{ml} b_{li} x_i x_m \\ &= ({}^t bb)_{mi} x_i x_m \\ &= \delta_{mi} x_i x_m \\ &= x_i x_i \end{aligned} \tag{16}$$
Diz-se que a combinação das componentes de um vetor dada por $x_l x_l$ é um *invariante*.

Considerando x_i e x'_i como coordenadas de um mesmo ponto, temos a função $x'_l(x)$, e, então,
$$\frac{\partial x'_l}{\partial x_i} = b_{li} \tag{17}$$

e

$$\frac{\partial x_m}{\partial x'_l} = a_{ml} \tag{18}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} x'_l &= \frac{\partial x'_l}{\partial x_i} x_i \\ x_m &= \frac{\partial x_m}{\partial x'_i} x'_l \end{aligned} \tag{19}$$

No que se segue, vamos *definir* um vetor através das Eqs.(19), ou seja, através das propriedades de transformação de suas componentes. Isto se faz mais ou menos assim: seja $\vec{v}$ um vetor, isto é, um conjunto de pares (v_i, S), onde S é uma base e $\{v_i : i = 1...n\}$ números ditos *componentes nessa base*, relacionados de uma base para outra, pelas Eq.(19). Para mostrar que o conjunto dos vetores assim definidos forma um espaço vetorial, definamos, dados $\vec{v}$ e um número λ, o vetor $\lambda\vec{v}$. É o vetor de componentes λv_i. Dados dois vetores, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, definamos o vetor $\vec{v} + \vec{w}$ como aquele cujas componentes são $v_i + w_i$. É facil mostrar que, nessas condições , o conjunto dos vetores forma um espaço vetorial. Nosso próximo passo é mostrar que existem quantidades mais complexas que os vetores e que têm interesse físico.

1.2 O momento de inércia

Considere um corpo rígido: um sistema de partículas cujas distâncias de umas as outras permanecem fixas. Seja m a massa de uma partícula genérica, e $\vec{v}$ a sua velocidade. O momento total do corpo rígido será então

$$\sum m\vec{v} \tag{20}$$

A notação usual seria: m_i é a massa da i-ésima partícula, $\vec{v}_i$ sua velocidade, e o momento total, $\sum_i m_i\vec{v}_i$. Contudo, queremos economizar índices, por isso omitimos aquele que identificaria cada partícula. A convenção é esta: uma letra minúscula representa quantidades de uma partícula; letras maiúsculas representam quantidades comuns a todas as partículas. Um resultado fundamental da mecânica é que a velocidade instantânea de cada ponto do corpo rígido, $\vec{v}$, pode ser decomposta assim:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \tag{21}$$

onde $\vec{V}$ é uma velocidade comum a todas as partículas, e $\vec{\Omega}$ é a *velocidade angular instantânea* (também a mesma para todas as partículas). Naturalmente, $\vec{r}$ é o vetor de posição de cada partícula.[1] A energia cinética do corpo rígido pode

[1]Em palavras, em cada instante o movimento de um corpo rígido pode ser decomposto numa translação de velocidade $\vec{V}$ mais uma rotação do corpo como um todo em torno de um eixo que tem a direção de $\vec{\Omega}$, com velocidade angular Ω. Este resultado é um caso particular do resultado mais geral, devido a Helmholtz, que caracteriza o movimento instantâneo de um corpo plástico. Veja Ref.([5]).

então ser escrita:

$$T = \sum \frac{m}{2}\vec{v}^2 = \sum \frac{m}{2}(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 \tag{22}$$

onde, como é usual, o quadrado de um vetor é o produto escalar dele consigo mesmo. Calculando este produto escalar, obtemos

$$(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}).(\vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{V}.\vec{V} + 2\vec{V}.(\vec{\Omega} \times \vec{r}) + (\vec{\Omega} \times \vec{r}).(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \tag{23}$$

O segundo termo do segundo membro aparece, na energia cinética, sob a forma

$$\sum m\vec{V}.(\vec{\Omega} \times \vec{r}) = (\vec{V} \times \vec{\Omega}) \,.\sum m\vec{r} \tag{24}$$

Mas o termo $\sum m\vec{r}$ pode ser posto igual a zero, se tomarmos a origem no centro de massa do corpo. De fato, sejam M a massa total do corpo, e $\vec{R}$ a posição de seu centro de massa. Então

$$\vec{R} = \frac{\sum m\vec{r}}{M} \tag{25}$$

e, se o centro de massa está na origem, $\vec{R} = 0$, o mesmo valendo, então, para $\sum m\vec{r}$. A energia cinética é então escrita

$$T = \frac{M}{2}\vec{V}^2 + \sum \frac{m}{2}(\vec{\Omega} \times \vec{r}).(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \tag{26}$$

O último termo pode ser reescrito assim:

$$\begin{aligned}
(\vec{\Omega} \times \vec{r}).(\vec{\Omega} \times \vec{r}) &= \epsilon_{ijk}\Omega_j x_k \epsilon_{ilm}\Omega_l x_m & (27)\\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}\Omega_j\Omega_l x_k x_m & (28)\\
&= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{kl}\delta_{jm})\Omega_j\Omega_l x_k x_m & (29)\\
&= \Omega_i\Omega_i x_j x_j - \Omega_i x_i \Omega_j x_j & (30)\\
&= \Omega_i\Omega_j(\delta_{ij}r^2 - x_i x_j) & (31)
\end{aligned}$$

o que dá, para a energia cinética,

$$T = \frac{M}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum m(\delta_{ij}r^2 - x_i x_j)\Omega_i\Omega_j \tag{32}$$

e, se definirmos as componentes do *momento de inércia* como

$$I_{ij} = \sum m(\delta_{ij}r^2 - x_i x_j) \tag{33}$$

teremos

$$T = \frac{M}{2}\vec{V}^2 + \frac{1}{2}I_{ij}\Omega_i\Omega_j \tag{34}$$

O momento de inércia é construído com as componentes do vetor $\vec{r}$, mas não é um vetor. Suas componentes contêm produtos das componentes de $\vec{r}$. Uma quantidade desse tipo é dita um *tensor*. Fala-se, então, no tensor momento de inércia. Vamos obter agora a maneira pela qual as componentes do tensor momento de inérica se transformam por mudança de base. A energia cinética é um invariante, pois não é alterada por uma mudança de base. Ora, a quantidade

$$I_{ij}\Omega_i\Omega_j \tag{35}$$

comparece na expressão da energia cinética, sendo, também, um invariante. Logo, se mudarmos de base, teremos

$$I_{ij}\Omega_i\Omega_j = I'_{lm}\Omega'_l\Omega'_m \tag{36}$$

onde as quantidades do segundo membro são componentes em relação à segunda base. As propriedades de transformação das componentes de $\vec{\Omega}$ são conhecidas, pois trata-se de um vetor. Então,

$$\begin{aligned} \Omega_i &= a_{li}\Omega'_l \\ \Omega_j &= a_{jm}\Omega'_m \end{aligned}$$

que, levadas à Eq.(36), dão

$$I_{ij}a_{li}a_{jm}\Omega'_l\Omega'_m = I_{lm}\Omega'_l\Omega'_m \tag{37}$$

Comparando, segue que

$$I'_{lm} = a_{li}a_{jm}I_{ij} \tag{38}$$

que dá a fórmula de transformação das componentes do tensor de inércia por mudança de base. Inspirados nesse resultado, definimos: *tensor de segunda ordem* é um conjunto de pares $(S\ ,\ t_{ij})$, onde S é uma base e t_{ij} são números, sendo que esses números se relacionam aos de outra base pelas relações (ditas fórmulas de transformação)

$$t'_{ij} = a_{il}a_{jm}t_{lm} \tag{39}$$

sendo os a_{il} os mesmos coeficientes que aparecem na fórmula de transformação das componentes de um vetor. Isto permite que se diga que um tensor de segunda ordem transforma-se como o produto de dois vetores.

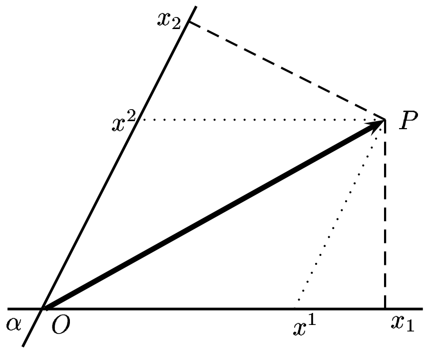
Chegamos às propriedades de transformação do tensor de inércia a partir do fato de que $I_{ij}x_ix_j$ devia ser um invariante. Vejamos agora um outro tensor que pode ser descoberto dessa forma: sejam P, de coordenadas x_i e $P + dP$, de coordenadas $x_i + dx_i$ dois pontos muito próximos. O quadrado da distância entre eles é dado em termos das coordenadas por

$$ds^2 = g_{ij}dx_idx_j \tag{40}$$

onde g_{ij} são coeficientes que dependem da base considerada. Como ds^2 é um invariante (a distância entre dois pontos não depende da base considerada) concluímos, pela mesma seqüência de argumentos, que g_{ij} são as componentes de um tensor de segunda ordem. Este tensor, um dos mais importantes, é denominado *tensor métrico.*

2 Eixos não ortogonais

Quando se utilizam bases não ortogonais, uma surpresa aparece: um vetor tem dois tipos diferentes de componentes, chamadas componentes covariantes e componentes contravariantes.



Isto vem do fato, como mostra a figura, de que podemos identificar um vetor através de suas projeções nos eixos, de duas maneiras diferentes: por projeções ortogonais e projeções paralelas (em eixos ortogonais essas duas projeções coincidem).

O vetor OP, referido a eixos oblíquos, pode ser caracterizado tanto pelo par de números (x^1, x^2), obtidos por projeção de P paralelamente aos eixos, quanto pelo par de números (x_1, x_2), obtidos por projeção ortogonal.(x^1, x^2) são as coordenadas *contravariantes* do vetor OP. (x_1, x_2) são as coordenadas *covariantes*. A relação entre elas é obtida facilmente:

$$x_1 = x^1 + x^2 \cos\alpha \quad (41)$$

$$x_2 = x^2 + x^1 \cos\alpha \quad (42)$$

assim como a relação inversa:

$$x^1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}(x_1 - x_2\cos\alpha) \quad (43)$$

$$x^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}(x_2 - x_1\cos\alpha) \quad (44)$$

O comprimento $\overline{OP}$ do vetor, em termos de suas componentes contravariantes, é dado por

$$\overline{OP}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + 2x^1x^2\cos\alpha = \sum_{i,j} g_{ij}x^ix^j \quad (45)$$

onde g_{ij} tem os seguintes valores, tabulados como uma matriz: $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

Usando (77), temos a expressão para $\overline{OP}$ em termos das componentes covariantes:

$$\overline{OP}^2 = \frac{1}{\sin^2\alpha}\left((x_1)^2 + (x_2)^2 - 2x_1x_2\cos\alpha\right) = \sum_{i,j} g^{ij}x_ix_j \tag{47}$$

com

$$g^{ij} = \frac{1}{\sin^2\alpha}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Vamos, a partir de agora,voltar a usar a notação abreviada: em expressões do tipo

$$\sum_j g_{ij}x^j$$

omitiremos o símbolo da soma (Σ). Toda vez que tivermos um índice repetido, como em $g_{ij}x^j$ (o j é repetido) somaremos sobre esse índice, como se houvesse o $\sum_j$ na frente. Então a Eq.(42) pode ser escrita

$$x_i = g_{ij}x^j \tag{49}$$

e a Eq.(77),

$$x^i = g^{ij}x_j \tag{50}$$

É claro então que

$$x_i = g_{ij}x^j = g_{ij}g^{jl}x_l \tag{51}$$

e, conseqüentemente,

$$g_{ij}g^{jl} = \delta_i^l \tag{52}$$

Isto é, a matriz de elementos g_{ij} é a inversa da matriz de elementos g^{ij}.

Se introduzirmos vetores unitários $\vec{e}_1$ ao longo do eixo 1 e $\vec{e}_2$ ao longo do eixo 2, teremos

$$\vec{x} = x^i\vec{e}_i \tag{53}$$

que define as componentes contravariantes. As componentes covariantes são definidas por

$$x_i = \vec{x}.\vec{e}_i \tag{54}$$

Usando (53) em (54), temos

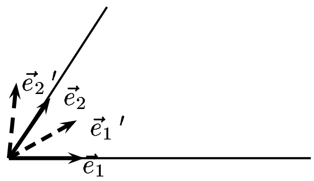
$$x_i = (x^j\vec{e}_j).\vec{e}_i = x^j(\vec{e}_i.\vec{e}_j) \tag{55}$$

logo, comparando com (49),

$$g_{ij} = \vec{e}_i.\vec{e}_j \tag{56}$$

2.1 Transformações de coordenadas

Introduzindo novos vetores unitários $\underline{\vec{e}}_1$ e $\underline{\vec{e}}_2$, obtidos dos anteriores por uma rotação de um certo ângulo θ, e traçando novos eixos nas direções desses vetores, teremos também novas componentes para um vetor qualquer.



Suponhamos que os vetores unitários originais se expressem em termos dos novos por

$$\vec{e}_i = \underline{\vec{e}}_r a_i^{\ r} \tag{57}$$

Então,

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x^i a_i^{\ r} \underline{\vec{e}}_r = \underline{x}^r \underline{\vec{e}}_r \tag{58}$$

onde $\underline{x}^r$ são as componentes do vetor $\vec{x}$ em relação aos novos eixos, na direção dos novos vetores unitários. Segue daí que

$$\underline{x}^r = a_i^{\ r} x^i \tag{59}$$

que dá a fórmula da transfromação para as componentes contravariantes de um vetor. Seja agora $b_r^{\ i}$ a matriz inversa de $a_i^{\ r}$, isto é, a matriz para a qual

$$b_r^{\ i} a_i^{\ l} = \delta_i^l \tag{60}$$

Então, como se verifica facilmente,

$$\underline{\vec{e}}_r = b_r^{\ i} \vec{e}_i \tag{61}$$

e

$$\underline{x}_r = (\vec{x}.\underline{\vec{e}}_r) = (\vec{x}.b_r^{\ i}\vec{e}_i) = b_r^{\ i}(\vec{x}.\vec{e}_i) = b_r^{\ i} x_i \tag{62}$$

logo,

$$\underline{x}_r = b_r^{\ i} x_i \tag{63}$$

Isto é, as componentes covariantes se transformam pela matriz inversa[2] da matriz de transformação das componentes covariantes. Por isso,

$$\underline{x}^r \underline{x}_r = a_i^{\ r} x^i b_r^{\ l} x_l = a_i^{\ r} b_r^{\ l} x^i x_l = \delta_i^l x^i x_l = x^i x_i \tag{64}$$

isto é, combinações do tipo covariante-contravariante são *invariantes*. Isto era de se esperar, pois

$$x^i x_i = g_{il} x^i x^l \tag{65}$$

é o quadrado do módulo do vetor de componentes x^i, e isto não pode depender de que tipo de coordenadas se usa.

[2]Na realidade, a matriz de transfromação em questão é a *transposta* da inversa, mas o nosso tratamento não é suficientemente fino para notar isso.

3 Conceito geral de tensor

Vamos passar agora a um grau maior de generalidade, abrindo mão da existência de coordenadas cartesianas. Os resultados serão então a extensão necessária do conceito de vetor (e, mais geralmente, tensor) para espaços não-euclideanos (ou para coordenadas curvilíneas em qualquer espaço). Sejam x^μ (μ=1,2...n) as coordenadas de um ponto P em um certo sistema de coordenadas S. Suponhamos que em um outro sistema de coordenadas S', as coordenadas do mesmo ponto P sejam x'^μ. Então

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\lambda) \tag{66}$$

é a função que transforma as coordenadas de P em S nas coordenadas de P em S'. Tanto $x^\lambda(P)$ quanto $x'^\mu(P)$ são funções do ponto. Seja dx^μ a diferencial da função $x^\mu(P)$. Sabe-se que ela se transforma, por mudança de variáveis (aqui chamadas de coordenadas), da maneira seguinte:

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} dx^\lambda \tag{67}$$

Definição : chama-se <u>vetor contravariante</u> ao ente matemático caracterizado por componentes A^μ que, por uma mudança de coordenadas $x \to x'$, se transformam em A'^μ da seguinte forma:

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} A^\lambda \tag{68}$$

isto é, da mesma forma que a diferencial das coordenadas de um ponto.

Sejam agora $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ as componentes do operador gradiente no sistema de coordenadas S. No S', serão escritas

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \tag{69}$$

e a matriz de transformação é a inversa da matriz de transformação das componentes de vetores contravariantes.

Definição : chama-se <u>vetor covariante</u> ao ente caracterizado por componentes B_μ que se transformam, por mudanças de coordenadas, em B'^μ da forma seguinte:

$$B'_\mu = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} B_\lambda \tag{70}$$

isto é, como as componentes do gradiente.

REGRA IMPORTANTE: COMPONENTES CONTRAVARIANTES, ÍNDICE EM CIMA; COMPONENTES COVARIANTES, ÍNDICE EM BAIXO!

3.1 Tensores

Tensores de segunda ordem são, essencialmente, um certo produto de dois vetores, como vimos no exemplo do tensor momento de inércia. Tensores de ordem n são produtos de n vetores. Essas quantidades aparecem naturalmente na física. Por exemplo, a curvatura do espaço-tempo, que, segundo Einstein, é o campo gravitacional, é um tensor de quarta ordem. No caso geral, onde não se usam coordenadas cartesianas ortogonais, um tensor de segunda ordem pode ser covariante, contravariante ou misto. Chama-se tensor de segunda ordem 2 vezes contravariante ao ente caracterizado pelas componentes $T_{\mu\nu}$ que se transformam, por mudança de coordenadas, da forma seguinte:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\omega}} T^{\lambda\omega} \tag{71}$$

isto é, como o produto de dois vetores contravariantes. Um tensor de segunda ordem é duas vezes covariante quando suas componentes se transformam assim:

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\nu}} T_{\lambda\omega} \tag{72}$$

ou seja, como o produto de dois vetores covariantes.
Finalmente, um tensor de segunda ordem é uma vez covariante e uma vez contravariante quando suas componentes se transformam como o produto de um vetor covariante por um vetor contravariante, isto é, quando

$$T'^{\ \nu}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\mu}} T^{\lambda}_{\omega} \tag{73}$$

Um tensor de ordem 1 é um vetor. Um tensor de ordem zero é um escalar, ou invariante. Um exemplo d einvariante: sejam A^{μ} as componentes de um vetor contravariante; B_{μ} as de um vetor covariante. Considere o produto "contraído" $A^{\mu}B_{\mu}$:

$$A'^{\lambda} B'_{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} B_{\beta} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} B_{\beta} A^{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\ \beta} A^{\alpha} B_{\beta} = A^{\alpha} B_{\alpha} \tag{74}$$

O produto "contraído"(isto é, com todos os índices repetidos) de um vetor covariante por um contravariante é um invariante. Este é o caso particular mais simples de uma técnica geral de construir invariantes: contrair todos os índices de uma expressão tensorial. Veremos outros exemplos.

3.1.1 "Macetes"

Considere o produto de um vetor v^{μ} por um tensor $T_{\alpha\beta}$ as componentes são

$$v^{\mu} T_{\alpha\beta} \tag{75}$$

que é uma quantidade com 3 índices. Não estudamos essas quantidades, mas são tensores de terceira ordem. A ordem é dada pelo número de índices. Agora vamos contrair[3] os índices μ e α. Temos então as quantidades

$$v^\mu T_{\mu\beta} \tag{76}$$

havendo, é claro, uma soma sobre os μ. Pois bem, essas quantidades são, agora, componentes de um vetor covariante! De fato (o leitor pode provar isso, ou então olhar da Ref.([1])), o que determina a natureza tensorial da quantidade é o número de índices <u>não contraídos</u>. Assim, $T^{\mu\nu}T_{\mu\nu}$ é um invariante, pois não tem nenhum índice não contraído.

3.2 Métrica no espaço

Seja $A^{\mu\nu}$ um conjunto de números tais que

$$A^{\mu\nu}B_\mu B_\nu \tag{77}$$

seja um invariante, para vetores covariantes B_μ arbitrários. Então $A^{\mu\nu}$ é um tensor duas vezes contravariante. De fato, sejam $A^{'\lambda\omega}$ as componentes de A na nova base. Então, como a expressão (77) é invariante, temos

$$A^{'\lambda\omega}B'_\lambda B'_\omega = A^{\mu\nu}B_\mu B_\nu \tag{78}$$

Mas $B_\mu = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}B'_\lambda$, com uma expressão análoga para B_μ. Segue que

$$A^{'\lambda\omega}B'_\lambda B'_\omega = A^{\mu\nu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\omega}{\partial x^\nu}B'_\lambda B'_\omega \tag{79}$$

logo,

$$A^{'\lambda\omega} = A^{\mu\nu}\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\mu}\frac{\partial x'^\omega}{\partial x^\nu} \tag{80}$$

e isto prova a nossa tese. Analogamente, se $A_{\mu\nu}$ são tais que, para vetores B^μ arbitrários, $A_{\mu\nu}B^\mu B^\nu$ é invariante, então $A_{\mu\nu}$ é um tensor duas vezes contravariante.
Corolário: $g_{\mu\nu}$ é um tensor duas vezes covariante. De fato,

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{81}$$

é um invariante para qualquer dx^μ. O tensor $g_{\mu\nu}$ é de grande importância, pelo que se segue. Seja A^μ um vetor contravariante, e considere a expressão

$$B_\nu = g_{\nu\mu}A^\mu \tag{82}$$

Como

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu}g'_{\alpha\beta} \tag{83}$$

[3]O nome é ruim. Mas, em outras linguas é ainda pior. Em alemão, a contração de índices é denominada *verjüngung*, que quer dizer qualquer coisa como *rejuvenescimento*!

e

$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A'^\alpha \tag{84}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
B_\nu &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\mu} g'_{\lambda\beta}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} A'^\alpha \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu}\delta^\beta_\alpha g'_{\lambda\beta} A'^\alpha \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} g'_{\lambda\alpha} A'^\alpha \\
&= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\nu} B'_\lambda
\end{aligned}$$

isto é, B_ν é um vetor covariante, que depende só de A e do tensor métrico. Por isso, adota-se a convenção de usar para este particular B_ν a notação A_ν. Conclusão: usando a métrica, associa-se a cada vetor contravariante A^μ um único vetor covariante A_μ. Deixa-se, então, quando há uma métrica, de falar em "vetor contravariante" ou "vetor covariante", para falar simplesmente de vetor, que tem <u>componentes</u> covariantes e <u>componentes</u> contravariantes. A operação

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \tag{85}$$

"baixa" o índice de A^μ.

<u>Teorema</u>: uma equação $T^{\mu\nu} = 0$, onde as componentes são em relação a um base S, implica que, em qualquer outra base S', se tenha $T'^{\mu\nu} = 0$. Ou seja, o tensor que tem todas as componentes nulas em uma base, as tem nulas em todas as bases. A demonstração é trivial, a partir das fórmulas de transformação das componentes.

3.2.1 Mais sobre o tensor métrico

No caso do espaço euclideano 3-dimensional com coordenadas cartesianas ortogonais,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \tag{86}$$

isto é, em coordenadas cartesianas $g_{ij} = \delta_{ij}$. Descrevendo o mesmo espaço com coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}
x^1 &= r\sin\theta\cos\phi \\
x^2 &= r\sin\theta\sin\phi \\
x^3 &= r\cos\theta
\end{aligned}$$

e chamando (r, θ, ϕ), nessa ordem, de $(\overline{x}^1, \overline{x}^2, \overline{x}^3)$, temos, como g_{ij} é um tensor,

$$\overline{g}_{lm} = \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^m} g_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^l}\delta_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^l}\frac{\partial x^i}{\partial \overline{x}^m}
\end{aligned}
$$

Obtivemos, então, uma fórmula para calcular o tensor métrico para quaisquer corrdenadas, a partir de seus valores em coordenadas cartesianas. Para coordenadas esféricas,

$$\overline{g}_{11} = \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1}\frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1}\frac{\partial x^2}{\partial \overline{x}^1} + \frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1}\frac{\partial x^3}{\partial \overline{x}^1} \tag{87}$$

ou seja,

$$\overline{g}_{11} = \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta = 1 \tag{88}$$

Por um cálculo análogo chega-se a

$$\overline{g}_{22} = r^2 \tag{89}$$

$$\overline{g}_{33} = r^2\sin^2\theta \tag{90}$$

Então o *elemento de linha* em coordenadas esféricas é

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{91}$$

3.2.2 Um exemplo importante

Consideremos as transformações lineares homogêneas que mantêm invariante a distância euclideana

$$g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = x^\mu x_\mu = (x^1)^2 + (x^2)^2 + ... + (x^n)^2 \tag{92}$$

A primeira coisa a notar é que $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Em conseqüência ,

$$x_\mu = g_{\mu\nu}x^\nu = \delta_{\mu\nu}x^\nu = x^\mu \tag{93}$$

ou seja, as componentes contravariantes e as covariantes coincidem. Restringindo-nos apenas a bases ortonormais, temos ainda que $g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}$, ou seja, as componentes do tensor métrico são sempre as mesmas, em qualquer base (ortonormal). Por outro lado, a fórmula geral de transformação dessas componentes é:

$$g_{\mu\nu} = g'_{\alpha\beta}a^\alpha_\mu a^\beta_\nu \tag{94}$$

onde os a^α_β são os coeficientes de transformação das coordenadas de um sistema para o outro, isto é:

$$x'^u = a^\mu_\lambda x^\lambda \tag{95}$$

A Eq.(94) pode então ser escrita

$$\delta_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}a^\alpha_\mu a^\beta_\nu = a^\beta_\mu a^\beta_\nu = a_{\beta\mu}a_{\beta\nu} \tag{96}$$

ou ainda

$$\delta_{\mu\nu} = ({}^t a)_{\mu\beta}(a)_{\beta\nu} = ({}^t aa)_{\mu\nu} \tag{97}$$

que quer dizer que

$${}^t a\, a = 1 \tag{98}$$

como matrizes. A matriz a é, então, ortogonal, resultado que já havíamos obtido anteriormente, de outra forma.

4 Transformações de Lorentz

Um *evento* 'e um ponto no espaço-tempo, isto é, alguma coisa que acontece em um ponto (x, y, z) em um instante t. O espaço-tempo de Minkowski é o conjunto dos eventos, caracterizados por suas coordenadas espaciais mais a coordenada $x^0 = ct$, que dá o instante em que o evento ocorre. As transformações de Lorentz são transformações entre membros de uma classe especial de referenciais desse espaço, os referenciais inerciais.

Daqui para diante usaremos a seguinte convenção de notação : índices gregos, como μ, λ, etc, terão valores (0,1,2,3); índices latinos, como i, j, etc, terão valores (1,2,3). Assim,

$$v^\mu v_\mu = v^0 v_0 + v^1 v_1 + v^2 v_2 + v^3 v_3$$

enquanto que

$$v^k v_k = v^1 v_1 + v^2 v_2 + v^3 v_3$$

Definição : as transformações de Lorentz são as transformações lineares homogêneas que mantêm invariante a expressão

$$s^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \tag{99}$$

Em maior detalhe: considere um determinado evento, visto por um observador no referencial inercial S e também por outro observador, no referencial inercial S'. O observador em S atribui ao evento as 4 coordenadas (x^0, x^1, x^2, x^3), enquanto que o outro atribui ao mesmo evento (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3). A teoria da relatividade nos diz que

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 - (x'^2)^2 - (x'^3)^2 \tag{100}$$

Escrevendo na forma usual, temos

$$g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\lambda\epsilon} x'^\lambda x'^\epsilon \tag{101}$$

onde $g_{\mu\nu}$ tem os valores

$$g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1 \tag{102}$$

todas as demais componentes sendo nulas. As transformações de Lorentz são, então, transformações do tipo

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu \tag{103}$$

que satisfazem a condição (101).

4.1 A transformação *especial* de Lorentz

Chama-se[4]. Trata-se da transformação de Lorentz de um sistema de referência S para um outro, S', que tem os eixos espaciais para lelos aos de S, tem uma velocidade relativa (em relação a S) de módulo v, ao longo da direção positiva dos eixos z, e tal que a seguinte condição se verifica: no instante $t = 0$ as origens dos dois sistemas de eixos coincidem, e neste evento (a coincidência espacial das origens, $t' = 0$ também. Esta é a transformação de Lorentz mais simples que não é trivial nem se reduz a uma mera rotação . Como é bem conhecido, ela é dada por:

$$x'^0 = \gamma(x^0 - \beta x^1) \tag{104}$$
$$x'^1 = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \tag{105}$$
$$x'^2 = x^2 \tag{106}$$
$$x'^3 = x^3 \tag{107}$$

onde $\beta = \frac{v}{c}$, e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Formalmente, temos

$$x'^\mu = a^\mu_{\ \nu} x^\nu \ , \tag{108}$$

portanto

$$a^0_{\ 0} = \gamma \tag{109}$$
$$a^0_{\ 1} = -\beta\gamma \tag{110}$$
$$a^1_{\ 0} = -\beta\gamma \tag{111}$$
$$a^1_{\ 1} = \gamma \tag{112}$$
$$a^2_{\ 2} = 1 \tag{113}$$
$$a^3_{\ 3} = 1 \tag{114}$$

todos os outros coeficientes sendo nulos.

4.2 Vetores e tensores no espaço-tempo

Vetores no espaço-tempo, ou 4-vetores, têm suas componentes transformando-se como as coordenadas, isto é: V^μ é um 4-vetor se tivermos

$$V'^\mu = a^\mu_{\ \nu} V^\nu \tag{115}$$

Um tensor de segunda ordem no espaço-tempo tem suas componentes $T^{\mu\nu}$ transformando-se como

$$T'^{\mu\nu} = a^\mu_{\ \lambda} a^\nu_{\ \omega} T^{\lambda\omega} \tag{116}$$

com os $a^\mu_{\ \nu}$ dados acima.

[4]Ou melhor, eu chamo! Não me lembro se o nome é este! Em todo o caso, o termo técnico é o seguinte: subgrupo próprio e ortócrono do grupo de Lorentz homogêneo. Viram, é melhor transformação especial de Lorentz.

5 O eletromagnetismo relativista

O eletromagnetismo como concebido por Maxwell poderia ser descrito assim: no sistema de referência especial em que o éter está em repouso, valem as equações de Maxwell. Em outros sistemas, só Deus sabe. Completar e letromagnetismo exigia, então, dizer como são as equações de Maxwell em outros sistemas inerciais, ou, equivalentemente, dados os campos eletromagnéticos no "sistema do éter", determiná-los em outros sistemas. Este foi o problema abordado (e resolvido) por Einstein em 1905. Por isso seu trabalho se chamava *Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento.* Vamos resolver este problema não à maneira de Einstein, que ainda não conhecia o conceito de tensores, mas à maneira de Minkowski, através de uma formulação 4-dimensional. Vamos substituir os vetores 3-dimensionais de Maxwell por 4-vetores e 4-tensores de segunda ordem.

5.1 A equação da continuidade

A equação da continuidade é nossa velha conhecida. Na linguagem tradicional ela se escreve

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\,\vec{j} = 0 \tag{117}$$

Vamos introduzir a seguinte quantidade, de 4 componentes:

$$j^\mu \equiv (c\rho, \vec{j}) \tag{118}$$

que significa o seguinte: as componentes de j^μ são $j^0 = c\rho$, $j^1 = j_x$, $j^2 = j_y$ e $j^3 = j_z$. Com essa notação , a equação da continuidade pode ser expressa de uma forma compacta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial j^0}{\partial x^0} + \frac{\partial j^1}{\partial x^1} + \frac{\partial j^2}{\partial x^2} + \frac{\partial j^3}{\partial x^3} && (119) \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{j}\ , && (120) \end{aligned}$$

logo, a equação da continuidade pode ser escrita

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \tag{121}$$

Mas há muito mais do que comodismo nisso. O próximo passo é o seguinte *postulado*: j^μ é um 4-vetor. No momento em que digo isto, a Eq.(121) adquire um significado muito maior, pois, se j^μ é um 4-vetor, $\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu}$ é um invariante (ou escalar), e a equação (121) diz que um escalar é igual a zero num sistema de referência. Logo, é igual a zero em qualquer sistema de referência (inercial, bem entendido). Ou seja, supor que j^μ é um 4-vetor é um grande passo, cheio de conseqüências. Por que j^μ é um 4-vetor? É um palpite (embora tenha o nome pomposo de postulado). Vamos ver se dá certo. Se todas as consequências desse palpite forem verdades da natureza, o palpite está apoiado pela experiência. É assim que se faz ciência[5].

Suponhamos que j^μ seja, mesmo, um 4-vetor. Então,

$$j^{'0} = a^0{}_\nu j^\nu \tag{122}$$

Para a transformação especial de Lorentz, teremos

$$j^{'0} = a^0{}_0 j^0 + a^0{}_1 j^1 \tag{123}$$

Tomemos aquele particular j^μ, em S, que tem a forma $j^\mu \equiv (c\rho, 0)$, ou seja, uma carga em repouso em S. Então, no sistema S',

$$j^{'0} = a^0{}_0 j^0 \tag{124}$$
$$c\rho' = a^0{}_0 c\rho \tag{125}$$
$$\rho' = \gamma\rho \tag{126}$$

Temos ainda a componente $j^{'1}$

$$j^{'1} = a^1{}_0 j^0 \tag{127}$$
$$= -\gamma\beta c\rho \tag{128}$$
$$j^{'1} = -\gamma\rho v \tag{129}$$
$$= -\rho' v \tag{130}$$

O resultado faz sentido, pois o observador ligado a S' vê uma carga se movendo com velocidade $-v$ e, pelo cálculo anterior, com uma densidade de carga ρ'.

Uma conseqüência importante é que a carga é um invariante. De fato, pela contração de Lorentz sabemos que um volume V para o observador em S é visto pelo observador em S' como $V' = \frac{1}{\gamma}V$. Então, temos

$$\rho' V' = \gamma\rho\frac{1}{\gamma}V = \rho V \tag{131}$$

e a carga é um invariante. Um bom teste experimental da invariância da carga é o seguinte: considere um fio comum de instalação elétrica. Ele é neutro, as cargas negativas exatamente compensando as cargas positivas. Aqueço o fio. À nova temperatura, os elétrons terão ganho muito mais velocidade do que os íons positivos (pois a energia cinética média é igual para os dois, e as massas são muito diferentes). No entanto, o fio continua neutro, mostrando que a igualdade das cargas continua a ser verificada.

5.2 O 4-vetor potencial

Considere agora a quantidade

$$A^\mu \equiv (\phi, \vec{A}) \tag{132}$$

[5]Muito interessante, neste contexto, a teoria da ciência de Sir Karl Popper. Para este ilustre filósofo o cérebro é uma *máquina de conjecturas* que devem ser confrontadas com a experiência. Para ele isto é a essência de todo aprendizado, não só da ciência.

onde ϕ é o potencial escalar e $\vec{A}$ é o potencial vetor. Usando a definição dada acima de j^μ podemos escrever as equações para os potenciais assim;

$$\vec{\nabla}^2 A^\mu - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}A^\mu = -\frac{4\pi}{c}j^\mu \tag{133}$$

Mas o operador diferencial $\vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}$ é um invariante, pois

$$\vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2} = -g^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{134}$$

onde usamos, pela primeira vez, o tensor $g^{\mu\nu}$, que é o próprio tensor métrico, mas expresso em termos de suas componentes contravariantes. É costume usar-se a notação $\Box^2$ para o operador $\vec{\nabla}^2 - \frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}$, que tem também um nome: *D'Alembertiano*. Então a equação para os potenciais fica

$$\Box^2 A^\mu = -\frac{4\pi}{c}j^\mu \tag{135}$$

Mas j^μ é um 4-vetor, logo $\Box^2 A^\mu$ também é. Como, além disso, $\Box^2$ é um invariante, segue de (135) que A^μ também é um 4-vetor. Há ainda uma coisa a ser demonstrada: a eq.(135) para os potenciais só é equivalente às equações de Maxwell se a condição de Lorenz,

$$\vec{\nabla}.\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{136}$$

for satisfeita. Como a eq.(135) precisa ser verdadeira em todos os referenciais, por ser um escalar igualado a zero, é preciso mostrar que também a condição de Lorenz é um invariante. Felizmente isto é muito facil:

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \frac{\partial A^k}{\partial x^k} = \frac{\partial\phi}{c\partial t} + \vec{\nabla}.\vec{A} \tag{137}$$

Logo, a condição de Lorenz é invariante, dada por

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \tag{138}$$

5.3 O tensor eletromagnético

Vamos agora introduzir as quantidades que correspondem, no formalismo relativista, aos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Considere o tensor de segunda ordem

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \tag{139}$$

Em termos dos $F_{\mu\nu}$ as equações de Maxwell adquirirão sua forma definitiva. Primeiro vamos mostrar explicitamente que $F_{\mu\nu}$ é um tensor.

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_{nu}}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial A'_\mu}{\partial x'^\nu} \tag{140}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}}$$

e, como $x^{\omega} = a_{\mu}^{\ \omega} x'^{\ \mu}$, temos

$$\frac{\partial x^{\omega}}{\partial x'^{\ \mu}} = a_{\mu}^{\ \omega}$$

Por outro lado,

$$A'_{\nu} = a_{\mu}^{\ \omega} A_{\omega} \tag{141}$$

Logo,

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu}^{\ \omega} a_{\nu}^{\ \lambda} \frac{\partial A_{\lambda}}{\partial x^{\omega}} - a_{\mu}^{\ \omega} a_{\nu}^{\ \lambda} \frac{\partial A_{\omega}}{\partial x^{\lambda}} = a_{\mu}^{\ \omega} a_{\nu}^{\ \lambda} F_{\omega\lambda} \tag{142}$$

que é a fórmula de transformação de um tensor de segunda ordem.

5.3.1 As equações de Maxwell

Para obter as equações de Maxwell basta uma conta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} \right) & (143) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \right) - \frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x_{\nu}} & (144) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left(\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x^{\nu}} \right) - g^{\lambda\nu} \frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\nu}} & (145) \\ &= \Box^2 A^{\mu} & (146) \\ &= -\frac{4\pi}{c} j^{\mu} & (147) \end{aligned}$$

Então,

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = -\frac{4\pi}{c} j^{\mu} \tag{148}$$

é o primeiro par de equações de Maxwell (vamos mostrar isso detalhadamente mais tarde). O segundo par decorre imediatamente da definição de $F^{\mu\nu}$:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial F^{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial F^{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} = 0 \tag{149}$$

5.4 Identificação das componentes de $F^{\mu\nu}$

Trata-se simplesmente de aplicar a definição

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} \tag{150}$$

$$
\begin{aligned}
F^{0\,1} &= \frac{\partial A^1}{\partial x_0} - \frac{\partial A^0}{\partial x_1} \\
&= \frac{\partial A^1}{\partial x^0} + \frac{\partial A^0}{\partial x^1} \\
&= \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
F^{10} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t} \\
F^{10} &= E_x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F^{1\,2} &= \frac{\partial A^2}{\partial x_1} - \frac{\partial A^1}{\partial x_2} \\
&= -\frac{\partial A^2}{\partial x^1} + \frac{\partial A^1}{\partial x^2} \\
&= \frac{\partial A_x}{\partial y} \partial A_y \partial z \\
&= -(rot\ \vec{A})_z \\
F^{12} &= B_z
\end{aligned}
$$

Os outros casos são repetições desses dois temos:

$$
F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{151}
$$

5.5 Transformação dos campos

Por uma transformação de Lorentz, isto é, uma transformação tal que

$$
\begin{aligned}
x^{'0} &= \gamma(x^0 - \beta x^1) && (152) \\
x^{'1} &= \gamma(-\beta x^0 + x^1) && (153) \\
x^{'2} &= x^2 && (154) \\
x^{'3} &= x^3 && (155)
\end{aligned}
$$

sabemos que $F^{\mu\nu}$ é um tensor de segunda ordem, logo, que suas fórmulas de transformação são :

$$
F^{'\mu\nu} = a^{\mu}_{\ \alpha} a^{\nu}_{\ \beta} F^{\alpha\beta} \tag{156}
$$

com

$$
\begin{aligned}
a^1_{\ 0} &= \ -\gamma\beta \ = a^0_1 && (157) \\
a^0_{\ 0} &= \ \gamma \ = a^1_{\ 1} && (158) \\
a^2_{\ 2} &= \ 1 \ = a^3_{\ 3} && (159)
\end{aligned}
$$

sendo os únicos coeficientes não-nulos. Substituindo esses valores na eq.(156) temos, por exemplo,

$$F'^{01} = a^0_{\ 0} a^1_{\ 1} F^{01} + a^0_{\ 1} a^1_{\ 0} F^{10} = \gamma^2 F^{01} + \gamma^2 \beta^2 F^{10} = \gamma^2 (1-\beta^2) F^{01} = F^{01} \tag{160}$$

Traduzindo para a linguagem dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ com o uso da tabela da eq.(151), temos

$$E'_x = E_x \tag{161}$$

Os cálculos são todos iguais. O resultado final é o seguinte:

$$E'_x = E_x \tag{162}$$
$$E'_y = \gamma E_y - \beta\gamma B_z \tag{163}$$
$$E'_z = \gamma E_z + \beta\gamma B_y \tag{164}$$
$$B'_x = B_x \tag{165}$$
$$B'_y = \gamma B_y + \beta\gamma E_z \tag{166}$$
$$B'_z = \gamma B_z - \beta\gamma E_y \tag{167}$$

O significado dessas fórmulas é claro: os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são aqueles observados por um dos observadores, que escolhemos como estando "em repouso". O outro observador, examinando o mesmo sistema físico, mas, em relação ao qual, está em movimento com velocidade $\vec{v}$, observa outros campos, $\vec{E'}$ e $\vec{B'}$. Por exemplo, se o observador S tem diante de si apenas uma carga em repouso, teremos $\vec{B} = 0$. Pelas equações acima vemos que S' observará, além de campos elétricos, campos magnéticos

$$B'_x = 0 \tag{168}$$
$$B'_y = \beta\gamma E_z \tag{169}$$
$$B'_z = -\beta\gamma E_y \tag{170}$$

o que é razoável, pois, para ele, a carga está em movimento com velocidade $-\vec{v}$, e, portanto, haverá uma corrente, com o seu campo magnético inevitável.

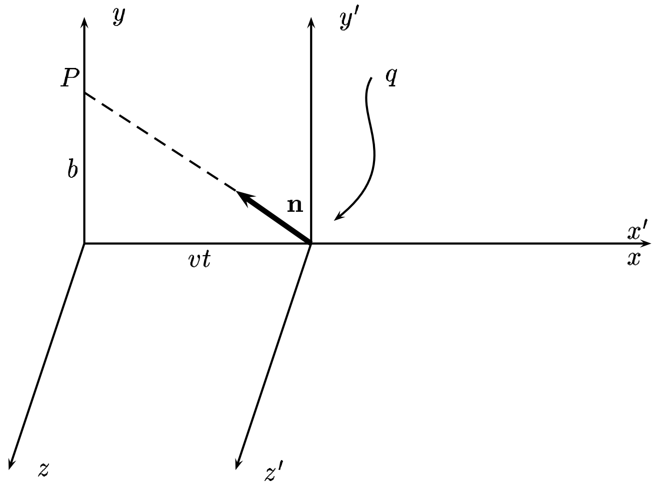
6 Aplicações

6.1 Partícula com velocidade constante

Uma partícula se move com velocidade constante $\vec{V}$. Pergunta-se quais os campos criados por ela. Vamos resolver este problema por meio de uma trnsformação de Lorentz adequada. Suponhamos que a partícula esteja em repouso no sistema de referência S'. O observador em S vai, então, vê-la nas condições do problema. No sistema S', o campo da partícula é o campo coulombiano. No ponto P (veja a figura) o campo é

$$\vec{E'}(P) = \frac{q}{r'^2}\frac{\vec{r'}}{r'} \tag{171}$$

com $(r')^2 = b^2 + v^2(t')^2$, e suas componentes nas direções x e y.



Temos

$$
\begin{aligned}
E'_x(P) &= \frac{q}{b^2+v^2(t')^2}\frac{-vt}{\sqrt{b^2+v^2(t')^2}} && (172)\\
E'_y(P) &= \frac{q}{b^2+v^2(t')^2}\frac{b}{\sqrt{b^2+v^2(t')^2}} && (173)\\
E'_z(P) &= 0 && (174)
\end{aligned}
$$

Note-se agora que

$$t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{175}$$

e, como o ponto P está em $x=0$,

$$t' = \gamma t \tag{176}$$

Nas coordenadas do observador em S, então,

$$
\begin{aligned}
E'_x(P) &= \frac{-qv\gamma t}{(b^2+v^2\gamma^2t^2)^{\frac{3}{2}}} && (177)\\
E'_y(P) &= \frac{qb}{(b^2+v^2\gamma^2t^2)^{\frac{3}{2}}} && (178)\\
E'_z(P) &= 0 && (179)
\end{aligned}
$$

Usando agora as fórmulas de transformação (Eq.164 e seguintes),

$$
\begin{aligned}
E_x(P) &= \frac{-qv\gamma t}{(b^2+v^2\gamma^2t^2)^{\frac{3}{2}}} && (180)\\
E_y(P) &= \frac{\gamma qb}{(b^2+v^2\gamma^2t^2)^{\frac{3}{2}}} && (181)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_z(P) &= 0 && (182)\\
B_x(P) &= 0 && (183)\\
B_y(P) &= 0 && (184)\\
B_z(P) &= \frac{\beta\gamma q b}{(b^2+v^2\gamma^2t^2)^{\frac{3}{2}}} && (185)
\end{aligned}
$$

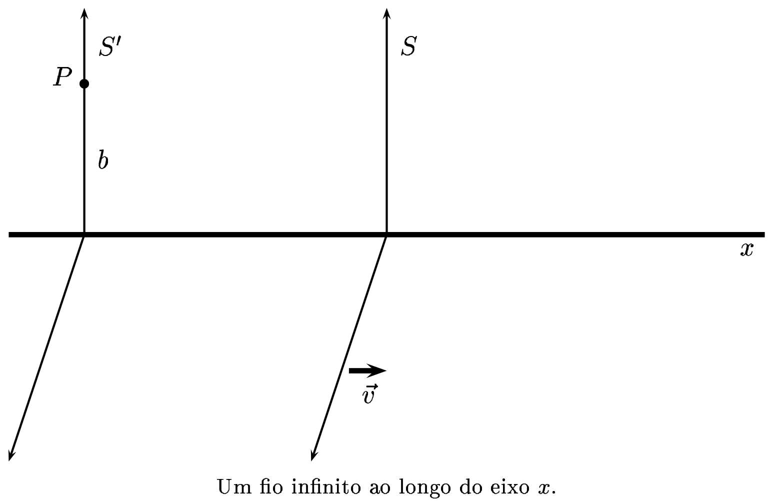
Para entender a aparência do campo elétrico, note-se que

$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{-q\gamma vt}{\gamma qb} = -\frac{vt}{b} = -\frac{x}{y} \tag{186}$$

isto é, o campo $\vec{E}$, como o $\vec{E}'$, é também radial. Como $E'_x = E_x$ e $E'_y = \frac{E_y}{\gamma}$, o campo transversal é mais forte do que o longitudinal, em relação ao campo $\vec{E}'$.

6.2 Campo de um fio com corrente constante

Para simplificar suponhamos que a corrente seja produzida por um feixe de elétrons com velocidade constante (sem a contrapartida de íons positivos, como num fio). Isto será simbolizado por um fio infinito (que poderia ser um tubo oco, dentro do qual estariam passando os elétrons).



Um fio infinito ao longo do eixo x.

O sistema S, que possui velocidade v em relação ao sistema S', enxerga os elétrons parados (v é também a velocidade dos elétrons!). Neste sistema (S), então, o campo magnético é nulo, e o campo elétrico é perpendicular ao fio, radial e de módulo

$$E = \frac{2\lambda}{r} \tag{187}$$

onde λ é a densidade linear de carga. Este resultado pode ser facilmente obtido usando-se o teorema de Gauss, por exemplo. No ponto P (veja a figura), temos

$$E_x(P) = 0 \quad B_x(P) = B_y(P) = B_z(P) = 0 \tag{188}$$

$$E_y(P) = \frac{2\lambda}{b} \tag{189}$$

$$E_z(P) = 0 \tag{190}$$

Usando as fórmulas de transformação obtemos

$$E'_x(P) = 0 \quad B'_x(P) = 0 \tag{191}$$

$$E'_y(P) = \gamma\frac{2\lambda}{b} \quad B'_y(P) = 0 \tag{192}$$

$$E'_z(P) = 0 \quad B'_z(P) = \beta\gamma\frac{2\lambda}{b} \tag{193}$$

Em suma, o campo magnético é

$$B'_z(P) = \beta\gamma\frac{2\lambda}{b} \tag{194}$$

Se um observador "em repouso" observa uma carga por unidade de comprimento λ e uma corrente zero, quais serão a densidade de carga e a corrente observadas por um observador de velocidade $-v$? Suponhamos que o fio tenha uma secção reta de área dS. Tomando um comprimento dl do fio, temos um volume $dV = dl\ dS$. A carga neste volume é Q.

$$Q = \rho dV = \rho dS dL = \lambda\ dl \tag{195}$$

Logo, $\lambda = \rho\ dS$. Então λ se transforma como ρ, pois dS, transversal à velocidade, é invariante. Mas, como j^μ é um 4-vetor,

$$\begin{aligned} j^{'0} &= \gamma j^0 + \beta\gamma j^1 &(196)\\ J^{'1} &= \beta\gamma j^0 + \gamma j^1 &(197)\end{aligned}$$

e $J^0 = c\rho$ (e, neste caso, $j^1 = 0$). Segue então que

$$\begin{aligned} j^{'0} &= \gamma c\rho \ \ ou \ \ \rho' = \gamma\rho &(198)\\ j^{'1} &= \beta\gamma c\rho \ \ ou \ \ j^{'1} = \gamma\rho v &(199)\end{aligned}$$

A corrente observada por S' é

$$i = j^{'1} dS = v\gamma\rho dS = v\gamma\lambda \tag{200}$$

Levando este resultado à Eq.(194),

$$B'_z(P) = \beta\gamma\frac{2\lambda}{b} = \frac{2i}{cb} \tag{201}$$

que é o resultado que obtivemos antes pela lei circuital de Ampère. Pode-se ainda calcular o campo elétrico em S', ou seja, o campo elétrico de um fio infinito por onde passa uma corrente i. Este campo é, como vimos,

$$E'_y(P) = \frac{2\gamma\lambda}{b} = \frac{2\,i}{bv} \tag{202}$$

que é um resultado bastante interessante, pois não depende só da corrente, mas também da velocidade. Assim, medindo-se simultaneamente os dois campos, pode-se determinar a corrente (através de $\vec{B}$) e depois a velocidade das partículas, através de $\vec{E}$.

References

[1] Synge, Schild, *Tensor Calculus*

[2] H. Weyl, *Space, Time, Matter*

[3] Bishop, Goldberg, *Tensor Calculus on Manifolds*

[4] Darling, *Differential Forms and Connections*

[5] H. Fleming, *Two Theorems by Helmholtz*, Revista Brasileira de Ensino de Física, no prelo.