Campo de uma massa puntiforme

Henrique Fleming

7-12-2002

1 Uma métrica para a simetria central

Trata-se de determinar o campo gravitacional de um ponto material. A localização desse ponto será denominada *centro*. O problema possui, evidentemente, simetria esférica em torno do centro. Fora do centro as equações de Einstein são:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = 0 \tag{1}$$

Escrevendo a equação acima em componentes mistas e contraíndo, temos

$$R = 0 \tag{2}$$

o que, por sua vez, levado em Eq.(1), dá

$$R_{ik} = 0 \tag{3}$$

Como condições de contorno, $g_{ik} \to \eta_{ik}$ no infinito (espacial). De nossa discussão anterior, levando em conta que, por causa da condição de contorno, o campo a longas distâncias é fraco, e que, para campos fracos,

$$g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \tag{4}$$

e

$$\Phi = -\frac{GM}{r} \tag{5}$$

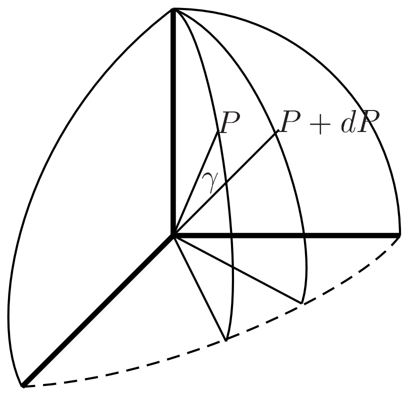
espera-se que

$$g_{00} \to 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \tag{6}$$

quando $r \to \infty$.

Resta caracterizar a simetria esférica. Defino ângulos θ e ϕ em torno do centro por meio de eixos. O centro, localização do ponto que cria o campo, descreve uma geodésica. Os eixos são transportados paralelamente ao longo dessa geodésica. A simetria esférica caracteriza-se então pela seguinte propriedade: um raio de luz que parte do centro, ou a ele chega, segue uma trajetória de ângulos θ e ϕ constantes. Seja E um evento. Usaremos para identificá-lo as seguintes coordenadas: um raio de luz emitido do centro em t_1 atinge E; um raio de luz emitido de E atinge o centro no instante t_2. Sejam θ e ϕ os ângulos da trajetória do centro a E (mais precisamente, do centro, no instante t_1, a E). Os ângulos da segunda trajetória serão os mesmos. Usamos então como coordenadas t_1 , t_2 , θ , ϕ.Note-se que isto é equivalente a usar coordemadas t_1 , $t_2 - t_1$, θ , ϕ, ou seja, t_1, a distância entre o centro e o ponto no qual o evento E aconteceu, e θ e ϕ.

A exigência de simetria esférica determina a forma com que os ângulos θ e ϕ, e suas diferenciais, podem aparecer no elemento de linha.



Sejam P e $P + dP$ dois pontos na superfície de uma esfera de raio 1. Ligando-os à origem tenho dois raios que formam entre si um ângulo γ. A simetria esférica diz que a distância entre P e $P + dP$ é determinada completamente por γ, independendo da particular localização de cada um dos pontos. A distância (sobre a esfera) entre P e $P + dP$ é dada exatamente por γ (em radianos), uma vez que o raio da esfera é 1. Se (θ, ϕ) e ($\theta + d\theta$,$\phi + d\phi$) são as coordenadas angulares de P e $P + dP$ respectivamente, e denotando γ por $d\gamma$, para ressaltar que é pequeno, temos a relação conhecida

$$cos(d\gamma) = cos\theta cos(\theta + d\theta) + sin\theta sin(\theta + d\theta)cos(d\phi) \tag{7}$$

Mas

$$\begin{aligned} cos(\theta + d\theta) &= cos\theta - sin\theta d\theta - \frac{1}{2}cos\theta d\theta^2 \\ sin(\theta + d\theta) &= sin\theta + cos\theta d\theta - \frac{1}{2}sin\theta d\theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cos(d\gamma) &= 1 - \frac{d\gamma^2}{2} \\ cos(d\gamma) &= 1 - \frac{d\phi^2}{2} \end{aligned}$$

Logo, Eq.(7) dá

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}(d\gamma)^2 &= cos^2\theta - cos\theta sin\theta d\theta - \frac{1}{2}cos^2\theta d\theta^2 \\ &+ (sin^2\theta + sin\theta cos\theta d\theta - \frac{1}{2}sin^2\theta d\theta^2)(1 - \frac{1}{2}d\phi^2) \end{aligned} \tag{8}$$

ou seja,

$$d\gamma^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2 \tag{9}$$

Então, para que a distância dependa só de γ, a dependência da métrica em θ e ϕ tem que ser da forma (9). Nas coordenadas escolhidas o elemento de linha tem, então, a forma

$$ds^2 = g'_{11}dt_1^2 + 2g'_{12}dt_1dt_2 + g'_{22}dt_2^2 + g'_{33}(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{10}$$

onde g'_{11}, g'_{12}, g'_{22} e g'_{33} são independentes de θ e ϕ.

Um raio de luz sai do centro em direção ao evento E. Considere dois pontos (= dois eventos) da linha de universo desse fóton. Claramente, $d\theta = 0$ e $d\phi = 0$. Além disso, ambos terão a mesma coordenada t_1 (o instante em que o fóton partiu do centro). Logo, $dt_1 = 0$. Como, para um fóton, $ds^2 = 0$, temos, de (10),

$$ds^2 = g'_{22}dt_2^2 = 0 \tag{11}$$

e, portanto, $g'_{22} = 0$. Pelo mesmo argumento ds^2 deve ser nulo para $d\theta = d\phi = dt_2 = 0$, o que dá $g'_{11} = 0$. Segue que

$$ds^2 = 2g'_{12}dt_1dt_2 + g'_{33}(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2) \tag{12}$$

Vamos introduzir agora as novas coordenadas r e t, definidas pelas condições:
(1) $r = \sqrt{-g_{33}}$
(2)O termo misto $drdt$ não deve aparecer em ds^2.

Chamando $r = R(t_1, t_2)$ e $t = T(t_1, t_2)$, a condição (2) impõe que

$$g^{rt} = \frac{\partial R}{\partial t_1}\frac{\partial T}{\partial t_2}g^{12} + \frac{\partial R}{\partial t_2}\frac{\partial T}{\partial t_1}g^{21} = 0 \tag{13}$$

Naturalmente as duas novas coordenadas, r e t, devem ser independentes. Devemos então ter

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial t_1} & \frac{\partial R}{\partial t_2} \\ \\ \frac{\partial T}{\partial t_1} & \frac{\partial T}{\partial t_2} \end{pmatrix} \neq 0 \tag{14}$$

Usando-se (13), pode-se escrever (14) assim:

$$2\frac{\partial R}{\partial t_1}\frac{\partial T}{\partial t_2} = -2\frac{\partial R}{\partial t_2}\frac{\partial T}{\partial t_1} \neq 0 \ . \tag{15}$$

Logo, devemos ter $\frac{\partial T}{\partial t_1} \neq 0$. Então, de

$$dt = \frac{\partial T}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\partial T}{\partial t_2}dt_2 \tag{16}$$

segue que

$$\begin{aligned} dt &= \frac{\frac{\partial T}{\partial t_1}}{\frac{\partial R}{\partial t_1}}\frac{\partial R}{\partial t_1}dt_1 + \frac{\frac{\partial T}{\partial t_2}}{\frac{\partial R}{\partial t_2}}\frac{\partial R}{\partial t_2}dt_2 \\ dt &= \left(\frac{\frac{\partial T}{\partial t_1}}{\frac{\partial R}{\partial t_1}}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial t_1}dt_1 - \frac{\partial R}{\partial t_2}dt_2\right) \end{aligned}$$

Isto é, para que esta equação determine t, é preciso que exista uma função $\frac{\partial T}{\partial t_1}$ tal que

$$\frac{\frac{\partial T}{\partial t_1}}{\frac{\partial R}{\partial t_1}}$$

seja um fator integrante da equação

$$dt = \frac{\partial R}{\partial t_1}dt_1 - \frac{\partial R}{\partial t_2}dt_2$$

Para duas variáveis o fator integrante sempre existe, e então é possível construir a coordenada t. Nas novas coordenadas, o elemento de linha então é:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{11}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2\right) \ . \tag{17}$$

Denotando g_{00} por c^2e^{ν} e g_{11} por $-exp\lambda$, temos

$$ds^2 = e^{\nu(r,t)}c^2dt^2 - \left(e^{\lambda(r,t)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2)\right) \tag{18}$$

Neste ponto podemos usar as equações de Einstein para determinar as funções $\nu(r,t)$ e $\lambda(r,t)$.

2 A métrica de Schwartzschild

Denotando por x^0, x^1, x^2, x^3, respectivamente, as coordenadas ct, r, θ, ϕ, temos, para as componentes não nulas do tensor métrico as expressões:

$$g_{00} = e^{\nu} \quad , g_{11} = -e^{\lambda} \quad , g_{22} = -r^2 \quad , g_{33} = -r^2 sin^2\theta \tag{19}$$

As componentes contravariantes são:

$$g^{00} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -e^{-\lambda}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2} sin^{-1}\theta \; . \tag{20}$$

Com esses valores podemos calcular os Γ^i_{kl}, obtendo

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{11} = \frac{\lambda'}{2} \qquad & \Gamma^0_{10} = \frac{\nu'}{2}, \quad \Gamma^2_{33} = sin\theta cos\theta, \\ \Gamma^0_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda-\nu}, \qquad & \Gamma^1_{22} = -re^{-\lambda}, \quad \Gamma^1_{00} = \frac{\nu'}{2} e^{\nu-\lambda}, \\ \Gamma^1_{12} = \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}, \qquad & \Gamma^3_{23} = \cot\theta, \quad \Gamma^0_{00} = \frac{\dot{\nu}}{2}, \\ \Gamma^1_{10} = \frac{\dot{\lambda}}{2} \qquad & \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-\lambda}. \end{aligned} \tag{21}$$

Aqui usamos $a' \equiv \frac{da}{dr}$, bem como $\dot{a} \equiv \frac{da}{dt}$. As equações de Einstein podem agora ser escritas,obtendo-se, depois do usual simples mas longo cálculo:

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^1_1 = -e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{22}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^0_0 = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}, \tag{23}$$

$$\frac{8\pi k}{c^4} T^1_0 = -e^{-\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{r} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \frac{8\pi k}{c^4} T^2_2 = \frac{8\pi k}{c^4} T^3_3 &= -\frac{1}{2} e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} + \frac{\nu' - \lambda'}{r} + -\frac{\nu'\lambda'}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} e^{-\nu}\left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda}\dot{\nu}}{2}\right) \end{aligned} \tag{25}$$

O tensor de momento-energia que comparece nessas equações tem a forma

$$T_{ik} = (p + \epsilon) u_i u_k - p g_{ik} \tag{26}$$

As equações acima podem ser integradas exatamente no caso de um campo central no vácuo, isto é, fora do centro (onde,supostamente, está uma massa que produz o campo). Devemos, portanto, colocar o tensor de momento-energia igual a zero. As equações que seguem são:

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r}+\frac{1}{r^2}\right)-\frac{1}{r^2} = 0, \tag{27}$$

$$e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda'}{r}-\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{r^2} = 0, \tag{28}$$

$$\dot{\lambda} = 0 \tag{29}$$

Da equação (29) vê-se que λ não depende do tempo. Somando as equações (27) e (28), obtemos $\lambda' + \nu' = 0$, e, portanto,

$$\lambda + \nu = f(t), \tag{30}$$

onde $f(t)$ é uma função só do tempo. Na realidade esta função sempre pode ser absorvida na definição do tempo, ou seja, sem perda de generalidade, é sempre possível tomá-la igual a zero (veja Apêndice). A equação (28) é facilmente integrável (veja, de novo, o Apêndice), dando:

$$e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1 + \frac{C}{r} \tag{31}$$

onde C é uma constante.

Assim, para $r \to \infty$, temos $e^{-\lambda} = e^{\nu} = 1$, ou seja, longe das fontes a métrica se torna galileana. A constante C é determinada impondo-se que a grandes distâncias, onde o campo é fraco, a lei de Newton seja obtida. Como, para campos fracos, $g_{00} = 1 + (2\phi/c^2)$ e $\phi = -(km/r)$, onde m é a massa do corpo que está criando o campo gravitacional, temos

$$C = -\frac{2km}{c^2}$$

Esta quantidade tem a dimensão de comprimento, e é chamada de *raio gravitacional* r_g do corpo

$$r_g = \frac{2km}{c^2} \tag{32}$$

A métrica do espaço-tempo assume, então, a forma

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2\, dt^2 - r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2) - \frac{dr^2}{1-\frac{r_g}{r}} \tag{33}$$

Esta é a famosa solução de Schwarzschild, que determina completamente o campo gravitacional no vácuo produzido por uma distribuição de massa de simetria central. Esta solução não requer que as fontes estejam em repouso, apenas que, se em movimento, este seja compatível com a simetria esférica: uma esfera de massa que pulse radialmente, por exemplo, está incluída neste caso. Assim como no caso newtoniano, a solução depende apenas da massa total.

Como o campo é estático, a métrica espacial é determinada simplesmente por

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2) \tag{34}$$

O significado geométrico da coordenada r é determinado pelo fato de que, na métrica (34), a circunferência de um círculo cujo centro está no centro do campo é dada por $2\pi r$. Mas a distância entre dois pontos r_1 e r_2 ao longo de um mesmo raio é dada pela integral

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} > r_2 - r_1 \tag{35}$$

que é um sinal de não-euclidicidade do 3-espaço. Note-se ainda que $g_{00} \leq 1$. Como a relação entre o tempo t e o tempo próprio τ é $d\tau = \sqrt{g_0 0}dt$, segue que

$$d\tau \leq dt \tag{36}$$

O sianl de igualdade vale somente no infinito, onde t coincide com o tempo próprio. Conclui-se que, a distâncias finitas das massas, o tempo t "flui mais lentamente" do que no infinito.

Finalmente, apresentamos uma expresão aproximada para ds^2 a grandes distâncias da origem. Seja

$$ds_0^2 = c^2dt^2 - r^2(\sin^2\theta d\phi^2 = d\theta^2)$$

a métrica *galileana*. A grandes distâncias espaciais, teremos

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{2km}{c^2r}(dr^2 + c^2dt^2) \tag{37}$$

A grandes distâncias o segundo termo representa uma pequena correção à métrica galileana. Essas métricas se dizem *assintoticamente chatas* (no bom sentido). Este resultado é bastante importante por causa da seguinte consideração: a grandes distâncias das massas que o produzem, todo campo é aproximadamente de simetria esférica.

De fato, consideremos uma função $f(r,\theta)$ que se anula no infinito e que depende ainda da coordenada θ (não sendo, por isso, de simetria esférica). Sua expansão em polinômios de Legendre é:

$$f(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

Para r muito grande, domina a menor potência de r, e se tem

$$f(r,\theta) \approx \frac{A_0}{r} P_0(\cos\theta) = \frac{A_0}{r}$$

3 Movimento em um campo gravitacional de simetria central

Consideremos o movimento de uma partícula em um campo gravitacional de simetria central. Esses movimentos se dão sempre em um plano, que escolhemos como sendo o plano $\theta = \pi/2$

Para determinar a trajetória da partícula, usamos a equação de Hamilton-Jacobi,

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2c^2 = 0 \tag{38}$$

onde denotamos a massa da partícula por m, e a massa do "Sol" (quando aparecer) por m'. Usando os g^{ik} dados anteriromente, temos

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left(\frac{\partial S}{c\partial t}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 - m^2c^2 = 0 \tag{39}$$

Aqui $r_g = 2km'/c^2$ é o *raio gravitacional* do corpo localizado no centro.

O processo geral de resolver a equação de Hamilton-Jacobi é procurar uma solução da forma

$$S = -\mathcal{E}_0 t + M\phi + S_r(r) \ , \tag{40}$$

com energia constante $\mathcal{E}_0$ e momento angular M. Substituíndo (40) em (39) podemos calcular dS_r/dr, e, então,

$$S_r = \int \sqrt{\frac{\mathcal{E}_0^2}{c^2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-2} - \left(m^2c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}} dr \tag{41}$$

A equação de movimento $r = r(t)$ é dada pela equação $\frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}_0} = const$, de onde

$$ct = \frac{\mathcal{E}_0}{mc^2} \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \{\left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 - \left(1 + \frac{M^2}{m^2c^2r^2}\right) \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\}^{1/2}} \tag{42}$$

A trajetória, isto é, a função $r(\phi)$ é obtida fazendo $\frac{\partial S}{\partial M} = const.$, obtendo-se

$$\phi = \int \frac{M dr}{r^2\sqrt{\frac{\mathcal{E}_0}{c^2} - \left(m^2c^2 + \frac{M^2}{r^2}\right)\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}} \tag{43}$$

É interessante comparar o resultado expresso em (42) com o resultado análogo da mecânica não-relativista. Classicamente se tem

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}[E + \frac{kmm'}{r}] - \frac{M^2}{m^2r^2}}} \tag{44}$$

Para compará-las basta lembrar que $\mathcal{E}_0 = mc^2 + E$. Fazendo esta substituição e lembrando que $r_g = \frac{2km'}{c^2}$ e considerando $\mathcal{E}_0$ pequeno frente a mc^2, obtemos concordância entre os resultados.

4 Apêndice

4.1 $\nu + \lambda = 0$

Das equações de Einstein segue que

$$\nu + \lambda = f(t) \tag{45}$$

onde $f(t)$ é uma função arbitrária.

A parte do elemento de linha ds^2 que depende de t é

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 + \dots$$

Uma transformação do tempo da forma $t = g(t')$, com $g'(t') \neq 0$ (para que haja a transformação inversa), não envolvendo r, altera somente esta parte do elemento de linha. Como

$$dt = g'(t')dt'$$

temos

$$ds^2 = e^\nu c^2 (g'(t'))^2 dt'^{\,2} + \dots$$

Voltemos a denotar o tempo por t. Escrevendo $(g'(t))^2 = e^{f(t)}$, temos

$$ds^2 = e^{\nu + f(t)} c^2 dt^2 + \dots \tag{46}$$

de maneira que a relação (45) fica

$$\nu + f(t) + \lambda = f(t)$$

ou

$$\nu + \lambda = 0$$