Ótica Geométrica

A ótica geométrica é o limite da ótica ondulatória para $\lambda = 0$. Na realidade, a ótica geométrica é uma aproximação que vale quando a difração é desprezível. Isto ocorre quando os obstáculos que as ondas de luz encontram têm dimensões grandes em relação ao comprimento de onda delas. Uma maneira de garantir que isto sempre se verifique é tomar ondas de comprimento bem pequeno. Por isso se diz "no limite $\lambda = 0$".

1 Equações de Maxwell

Suponhamos que a propagação da luz se dê em um meio material simples, descrito por uma constante dielétrica ϵ e uma permeabilidade magnética μ. Se o meio for homogêneo e se $\vec{j} = 0$ e $\rho = 0$, teremos as equações de onda

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

para o campo elétrico, e

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \tag{2}$$

com

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

Estas equações seguem diretamente das equações de Maxwell, como vimos anteriormente. Se a onda for monocromática, a dependência temporal será

$$e^{-i\omega t}$$

e a equação 1 fica

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{v^2}\vec{E} = 0 \tag{3}$$

e, pondo $k = \frac{\omega}{v} = \sqrt{\epsilon\mu}\frac{\omega}{c}$, temos

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \; . \tag{4}$$

Vamos nos restringir a ondas escalares, ou seja, vamos ignorar que os campos são vetores. Perderemos com isso toda a variedade de fenômenos associados à polarização. No entanto, muitos fenômenos, aqueles que são diretamente associados ao caráter ondulatório, ao fenômeno da interferência, serão ainda razoavelmente descritos. Seja u o campo escalar (por exemplo, uma das componentes de $\vec{E}$). A equação é

$$\vec{\nabla}^2 u + k^2 u = 0 \; . \tag{5}$$

2 A equação do eikonal

Vamos procurar soluções da forma

$$u = Ae^{ik_0 S} \tag{6}$$

com $k_0 = \frac{\omega}{c}$, onde A e S são funções de x, y, z que variam lentamente e que não tendem a ∞ quando k_0 cresce.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (ik_0 u \frac{\partial S}{\partial x} + u \frac{\partial \log A}{\partial x}) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \{-k_0^2 u (\frac{\partial S}{\partial x})^2 = ik_0 u \frac{\log A}{\partial x})^2 + u \frac{\partial^2 \log A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + ik_0 u \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \\
&+ ik_0 u \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial \log A}{\partial x} + u (\frac{\partial \log A}{\partial x})^2 + \\
&+ u \frac{\partial^2 \log A}{\partial x^2}\}
\end{aligned} \tag{8}$$

com termos análogos para as derivadas em y e z. Assim, temos

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}^2 u &= \{-k_0^2 u [(\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2 + (\frac{\partial S}{\partial z})^2] + \\
&+ 2ik_0 u (\frac{\partial \log A}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial \log A}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial \log A}{\partial z} \frac{\partial S}{\partial z}) + \\
&+ ik_0 u (\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}) + \\
&+ u [(\frac{\partial \log A}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \log A}{\partial y})^2 + (\frac{\partial \log A}{\partial z})^2] + \\
&+ u (\frac{\partial^2 \log A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \log A}{\partial z^2})\}
\end{aligned} \tag{9}$$

Isto pode ser abreviado assim:

$$\vec{\nabla}^2 u = -k_0^2 u \vec{\nabla} S . \vec{\nabla} S + 2ik_0 u \vec{\nabla} \log A . \vec{\nabla} S + ik_0 u \vec{\nabla}^2 S + u \vec{\nabla} \log A . \vec{\nabla} \log A + u \vec{\nabla}^2 \log A \tag{10}$$

Logo, a equação fica:

$$k^2 = k_0^2 \vec{\nabla} S . \vec{\nabla} S - 2ik_0 \vec{\nabla} \log A . \vec{\nabla} S - ik_0 \vec{\nabla}^2 S - \vec{\nabla} \log A . \vec{\nabla} \log A - \vec{\nabla}^2 \log A \tag{11}$$

ou ainda,

$$\frac{k^2}{k_0^2} = \vec{\nabla} S . \vec{\nabla} S - \frac{2i}{k_0} \vec{\nabla} \log A . \vec{\nabla} S - \frac{i}{k_0} \vec{\nabla}^2 S - \frac{1}{k_0^2} \vec{\nabla} \log A . \vec{\nabla} \log A - \frac{1}{k_0^2} \vec{\nabla}^2 \log A \tag{12}$$

No limite $k_0 \to \infty$, temos

$$\vec{\nabla} S . \vec{\nabla} S = n^2 \tag{13}$$

e

$$\frac{2i}{k_0}(\vec{\nabla}\log A.\vec{\nabla}S + \frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 S) = 0 \tag{14}$$

de maneira que as equações são:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\log A.\vec{\nabla}S &= -\frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 S && (15)\\ \vec{\nabla}S.\vec{\nabla}S &= n^2 && (16) \end{aligned}$$

que são as equações básicas da ótica geométrica.[1]

3 Exemplos

3.1 n é constante

$$\vec{\nabla}S.\vec{\nabla}S = \text{ constante.}$$

Um exemplo é $\vec{\nabla}S =$ constante, ou seja,

$$S = n(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

Neste caso

$$\vec{\nabla}S = n(\alpha\vec{\nabla}x + \beta\vec{\nabla}y + \gamma\vec{\nabla}z) = n(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k})$$

e

$$\vec{\nabla}S.\vec{\nabla}S = n^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = n^2 \tag{17}$$

Logo,

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\ , \tag{18}$$

e as superfícies

$$S = n(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \ cte. \tag{19}$$

são planos. Ora, as superfícies $S = cte.$ são as frentes de onda, logo a propagação aqui descrita é a de ondas planas. Note-se que, se $\vec{n}$ é um vetor unitário, isto é, se $\vec{n}.\vec{n} = 1$, temos, com $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$,

$$\vec{n}.\vec{r} = n_x x + n_y y + n_z z$$

e

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

Comparando com a Eq.(18) vemos que $n_x = n\alpha$, $n_y = n\beta$ e $n_z = n\gamma$, razão pela qual $alpha$, β e γ são os " cosenos diretores" da direção $\vec{n}$.

[1] Note que

$$\frac{k^2}{k_0^2} = \frac{\epsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2}}{\frac{\omega^2}{c^2}} = \epsilon\mu = n^2$$

onde n é o índice de refração do meio.

3.2 Dois meios homogêneos

Vamos ver agora o casode dois meios homogêneos separados por um plano em $x = 0$ Temos

$$(\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2 + (\frac{\partial S}{\partial z})^2 = (\frac{k_1}{k_0})^2 \; para \; x < 0 \tag{20}$$

e

$$(\frac{\partial S}{\partial x})^2 + (\frac{\partial S}{\partial y})^2 + (\frac{\partial S}{\partial z})^2 = (\frac{k_2}{k_0})^2 \; para \; x > 0 \tag{21}$$

Seja S um plano cuja normal não tem componente ao longo de z. Então

$$S(x, y) = \frac{k_1}{k_0}(x \cos\theta_1 + y \sin\theta_1) \;\; x < 0 \tag{22}$$

$$S(x, y) = \frac{k_2}{k_0}(x \cos\theta_2 + y \sin\theta_2) \;\; x > 0 \tag{23}$$

Para $x = 0$,

$$\frac{k_1}{k_0} y \sin\theta_1 = \frac{k_2}{k_0} y \sin\theta_2 \tag{24}$$

ou

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \tag{25}$$

que é a lei de Snell-Descartes.

3.3 Simetria esférica

Considere a seguinte solução da equação do eikonal, dotada de simetria esférica:

$$S = nr \tag{26}$$

onde $n = |\vec{n}|$ e $r = |\vec{r}|$. Temos $\vec{\nabla} S = n\vec{\nabla} r = n\frac{\vec{r}}{r}$ e, portanto, $\vec{\nabla} S.\vec{\nabla} S = n^2$. As superfícies $S = cte.$ são, neste caso, as superfícies $r = cte.$, ou seja, as frentes de onda são superfícies esféricas com centro na origem. Para que se trate verdadeiramente de uma solução da equação do eikonal, é preciso ainda que a Eq.(16) seja satisfeita:

$$\vec{\nabla} \log A.\vec{\nabla} S = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}^2 S \tag{27}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}.\vec{\nabla} S \quad &= \vec{\nabla}.(n\frac{\vec{r}}{r} = n\{\frac{1}{r}\vec{\nabla}.\vec{r} + \vec{r}.\vec{\nabla}\frac{1}{r}\} \\
&= n\{\frac{3}{r} + \vec{r}.(-\frac{\vec{r}}{r^3})\} = n\{\frac{3}{r} - \frac{1}{r}\} \\
&= \frac{2n}{r}
\end{aligned}$$

ou

$$\vec{\nabla}^2 S = \frac{2n}{r} \tag{28}$$

É necessário então que

$$\vec{\nabla} \log A . \vec{\nabla} S = -\frac{n}{r}$$

ou, que

$$\vec{\nabla} \log A . n \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{n}{r}$$

Segue então que

$$\vec{\nabla} \log A . \vec{r} = -1$$

Portanto,

$$\vec{\nabla} \log A = -\frac{\vec{r}}{r^2} \tag{29}$$

Mas $\vec{\nabla} \log A = \frac{1}{A} \vec{\nabla} A = -\frac{\vec{r}}{r^2}$ e, conseqüentemente,

$$A = \frac{1}{r} \tag{30}$$

Podemos então contruir a onda $u = Ae^{ik_0 S}$(ver Eq.(6)).

$$u = \frac{1}{r} e^{ik_0 nr} = \frac{1}{r} e^{ikr} = e^{i\sqrt{\epsilon\mu}\frac{\omega}{c} r} \tag{31}$$

que é a parte espacial de uma onda esférica.

4 Curvatura dos raios de luz

Considere a curva descrita pela extremidade do vetor $\vec{r}(s)$, onde s é o comprimento da curva. Seja $\vec{s}$ o vetor tangente à curva em cada ponto. Se a curva for uma reta, a tangente em todos os pontos tem a mesma direção. Em curvas que não são retas, a tangente "gira" quando se percorre a curva. Este movimento da tangente é usado para definir a *curvatura* de uma curva como o vetor

$$\vec{K} = \frac{d\vec{s}}{ds} \tag{32}$$

Como o vetor tangente é $\vec{s} = \frac{\vec{R}}{ds}$, vemos que a curvatura é $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$, ou seja é a "aceleração", se s for tomado como o tempo.
Considere, por exemplo, um círculo, de equação $x^2 + y^2 = R^2$. Temos

$$\begin{aligned} x &= R\cos\theta \\ y &= R\sin\theta \\ dx &= -R\sin\theta d\theta \\ dy &= R\cos\theta d\theta \end{aligned}$$

e segue facilmente que

$$ds^2 = R^2 \sin^2\theta d\theta^2 + R^2 \cos^2\theta d\theta^2 = R^2 d\theta^2$$

ou,

$$ds = Rd\theta$$

Como $\vec{r} = R\cos\theta\vec{i} + R\sin\theta\vec{j}$, temos

$$\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds} = -R\sin\theta\frac{d\theta}{ds}\vec{i} + R\cos\theta\frac{d\theta}{ds}\vec{j}$$

que dá

$$\vec{s} = -\sin\theta\vec{i} + \cos\theta\vec{j}$$

Para a curvatura então temos:

$$\vec{K} = \frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{1}{Rd\theta}(-\cos\theta d\theta\vec{i} - \sin thetad\theta\vec{j})$$

ou

$$\vec{K} = -\frac{\vec{R}}{R^2} \tag{33}$$

A curvatura é, então, um vetor, cujo módulo é

$$K = \frac{1}{R}$$

A curvatura do círculo é tanto maior quanto menor o raio, o que mostra que a definição acompanha a idéia intuitiva.

Voltemos ao caso geral. Como o vetor tangente $\vec{s}$ tem módulo 1[2], de $\vec{s}.\vec{s} = 1$ segue que

$$\vec{s}.\frac{d\vec{s}}{ds} = 0 \tag{34}$$

ou seja, $\frac{d\vec{s}}{ds}$ é perpendicular a $\vec{s}$. Logo,$\frac{d\vec{s}}{ds}$ pode ser escrito na forma

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = \vec{A} \times \vec{s} \tag{35}$$

onde $\vec{A}$ é um vetor a determinar[3]De fato, considere o vetor

$$\vec{A} = a\, rot\vec{s} \tag{36}$$

onde a é uma constante. Temos $\frac{d\vec{s}}{ds} = a\, rot\vec{s} \times \vec{s}$ e

$$(\frac{d\vec{s}}{ds})_i = \frac{d\vec{s}_i}{ds} = \frac{\partial s_i}{\partial x^l}\frac{dx^l}{ds} = \frac{\partial s_i}{\partial x^l}s^l = (\partial_l s_i)s^l \tag{37}$$

enquanto

$$\begin{aligned}(rot\vec{s} \times \vec{s})_i &= \epsilon_{ijk}(rot\vec{s})_j\vec{s}_k = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}(\partial_l s_m)s_k \\ &= (\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il})(\partial_l s_m)s_k = (\partial_l s_i)s_l - (\partial_i s_k)s_k\end{aligned}$$

[2]Pois $\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}$, temos que $\vec{s}.\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1$ onde usamos que $d\vec{r}.d\vec{r} = ds^2$

[3]Em outras palavras, existe um vetor $\vec{A}$ tal que a Eq.(35) é satisfeita.

e o último termo é nulo, pois $(\partial_i s_k)s_k = \frac{1}{2}\partial_i(\vec{s})^2$, e $\vec{s}.\vec{s} = 1$. Conseqüentemente,

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = rot\vec{s} \times \vec{s} \tag{38}$$

Até agora falamos genericamente de curvas. Consideremos agora curvas que sejam raios de luz. Como vimos anteriormente, os raios de luz são ortogonais às superfícies $S = cte.$, ou seja, têm, em cada ponto dessas superfícies, a direção de $\vec{\nabla}S$. Em símbolos,

$$\vec{s} = \frac{1}{n}\vec{\nabla}S \tag{39}$$

Daí decorre que

$$rot(n\vec{s}) = 0 \tag{40}$$

onde usamos o fato conhecido $rot\ grad = 0$. Da Eq.(40) segue que

$$\begin{aligned} nrot\vec{s} + \vec{\nabla}n \times \vec{s} &= 0 \\ rot\vec{s} &= \frac{1}{n}(\vec{s} \times \vec{\nabla}n) \end{aligned}$$

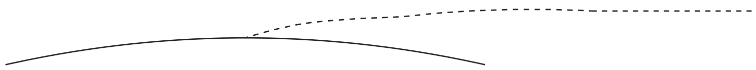
e, portanto, que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{s}}{ds} &= \frac{1}{n}(\vec{s} \times \vec{\nabla}n) \times \vec{s} \\ n\frac{d\vec{s}}{ds} &= (\vec{s} \times \vec{\nabla}n) \times \vec{s} \\ &= (\vec{s}.\vec{s})\vec{\nabla}n - (\vec{s}.\vec{\nabla}n)\vec{s} \end{aligned}$$

e, finalmente,

$$n\vec{K} = \vec{\nabla}n - (\vec{s}.\vec{\nabla}n)\vec{s} \tag{41}$$

onde $\vec{K}$ é o vetor curvatura do raio. Uma conseqüência imediata da Eq.(41) é que em meios homogêneos (n constante) a curvatura é nula, e os raios são retas. Uma outra aplicação é a seguinte: quando o Sol está muito baixo, no nascente ou no poente, os raios que atingem um observador são aproximadamente horizontais. O índice de refração da atmosfera diminui com a altitude, logo $\vec{\nabla}n$ aponta para o centro da Terra, ou seja, é vertical. Então, na Eq.(41), o segundo termo do segundo membro é muito pequeno. Conclui-se que a curvatura desses raios é paralela a $\vec{\nabla} n$, apontando para o centro da Terra. Os raios, isto é, se curvam para baixo. Em conseqüência, o observador, que interpreta sempre o raio como uma reta, "vê" o Sol mais alto do que está na realidade. De fato, isto explica por que se vê o Sol ainda um pouco depois de ele ter se posto.



Curvatura de um raio de luz

5 Lentes esféricas

No tratamento elementar da ótica geométrica obtém-se, por constrções geométricas utilizando a lei de Snell-Descartes, a equação

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{42}$$

sendo a a distância do objeto à lente (supostamente de espessura desprezível), b a distância da imagem à lente, e f a distância focal da lente, que é dada por

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

sendo n o índice de refração do vidro, R_1 e R_2 os raios das superfícies esféricas da lente. O significado de f pode ser obtido facilmente da Eq.(42): tomando-se $a = \infty$, tem-se

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} \tag{43}$$

que mostra ser f a distância a que se forma a imagem quando o objeto está no infinito. Na Eq.(42) a lente é suposta de espessura zero, e a distância à lente é confundida com a distância ao centro da lente.

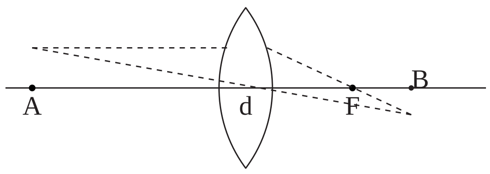


Fig.1

Vamos tratar esse problema com o uso da equação do eikonal. Não haverá qualquer dificuldade em tratar o caso de lentes espessas, e o caminho estará aberto também para o tratamento de lentes cujas faces não sejam superfícies esféricas. O ponto P da figura designa a posição do objeto, de coordenadas $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. O eixo z é a direção de incidência: é a reta que une P ao centro da lente, O.

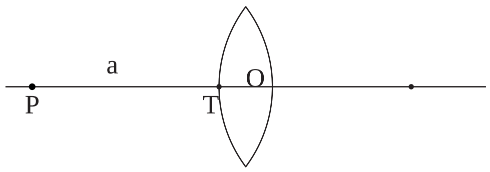


Fig.2

Um raio partido de P e incidente sobre a lente, encontra-a no ponto T, pertencente a uma superfície esférica de raio R_1 (a primeira face da lente). O centro dessa superfície esférica está no ponto de coordenadas $x = 0$, $y = 0$, $z = a + R_1$. As coordenadas de T são $x = 0$, $y = 0$, $z = a$. Um ponto vizinho à lente tem coordenada $z = a + \zeta$, com $|a| \gg |\zeta|$

As ondas esféricas emitidas de P têm o eikonal

$$s = nr = n\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{44}$$

com $n = 1$ (região externa à lente), ou seja, mais explicitamente,

$$s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{45}$$

Perto da primeira face da lente o eikonal é

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 + (a + \zeta)^2}$$

Restringindo-nos a pequenas aberturas, basta considerar valores pequenos de x e y. Então,

$$S = \sqrt{(a + \zeta)^2 + x^2 + y^2} = \sqrt{(a + \zeta)^2 (1 + \frac{x^2 + y^2}{(a + \zeta)^2})} \tag{46}$$

$$= \quad (a+\zeta)\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{(a+\zeta)^2}} \approx (a+\zeta)(1+\frac{x^2+y^2}{2(a+\zeta)^2})$$

ou seja,

$$S = a + \zeta + \frac{x^2+y^2}{2a} \tag{47}$$

A equação da superfície da primeira face da lente é

$$x^2 + y^2 + (z - a - R_1)^2 = R_1^2 \tag{48}$$

Podemos agora resolver o problema da primeira refração na lente.

5.1 A primeira refração

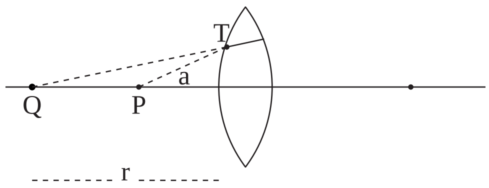


Fig.3

A figura mostra um raio saindo de P e incidindo sobre a lente, e o raio refratado (que existe só dentro da lente). Prolongando-se o raio refratado até que atinja o eixo da lente, determina-se o ponto Q_1. Esse raio, TQ_1, existiria se a propagação se desse num meio homogêneo de índice de refração igual ao da lente, n. O eikonal do raio refratado é, então,

$$S = n\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a + r)^2} \tag{49}$$

pois as coordenadas de Q_1 são $x = 0$, $y = 0$, $z = -(r - a)$. Para pontos próximos à primeira face da lente temos $z = a + \zeta$, com $|a| \gg |\zeta|$. Então,

$$S = n\sqrt{x^2 + y^2 + (r + \zeta)^2} \tag{50}$$

ou, aproximadamente,

$$S = n(r + \zeta + \frac{x^2 + y^2}{2r}) + S_0 \tag{51}$$

onde S_0 é uma constante. Em geral essa constante aditiva é desnecessária, embora esteja sempre presente, já que, sendo a equação do eikonal uma equação para $\vec{\nabla}S$, se um S é solução, $S + S_0$ também o será, S_0 sendo uma constante arbitrária. Neste problema que estamos estudando, imporemos a continuidade do eikonal numa determinada superfície, e, para isso ser possível, é necessário incluir o S_0.

A condição de contorno é que o eikonal (a fase!) varie continuamente ao atravessar a face da lente. Se isto não lhe parece intuitivo, note que é sob essa condição que se obtém a lei de Snell-Descartes para a refração numa superfície plana, o que pode ser considerado uma "verificação experimental" do fato. Para pequenas aberturas os pontos que satisfazem a Eq.(48) da superfície são tais que

$$x^2 + y^2 + (\zeta - R_1)^2 = R_1^2 \tag{52}$$

ou, como $R_1 \gg |\zeta|$,

$$x^2 + y^2 + R_1^2(1 - \frac{\zeta}{R_1})^2 = R_1^2 \tag{53}$$

ou ainda,

$$\zeta = \frac{x^2 + y^2}{2R_1} \tag{54}$$

Devemos ter a coincidência dos dois eikonais sobre a superfície da lente. Então,

$$\{a + \zeta + \frac{x^2 + y^2}{2a}\}_{Sup} = \{n(r + \zeta + \frac{x^2 + y^2}{2r}) + S_0\}_{Sup} \tag{55}$$

que leva a

$$a + \frac{x^2 + y^2}{2R_1} + \frac{x^2 + y^2}{2a} = nr + S_0 + n\frac{x^2 + y^2}{2R_1} + n\frac{x^2 + y^2}{2r} \tag{56}$$

ou seja,

$$S_0 + nr = a \tag{57}$$

e

$$\frac{1}{2R_1} + \frac{1}{2a} = \frac{n}{2R_1} + \frac{n}{2r} \tag{58}$$

ou ainda

$$\frac{n-1}{R_1} = \frac{1}{a} - \frac{n}{r} \tag{59}$$

Esta equção resolve o problema da refração por um dioptro esférico.

5.2 A segunda refração

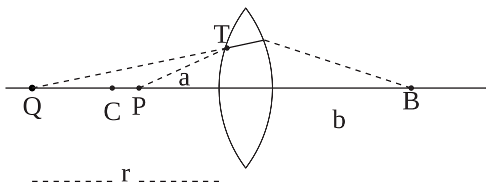


Fig.4

A equação da segunda face, se R_2 é o seu raio e C o seu centro, é

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = R_2^2 \tag{60}$$

ou

$$x^2 + y^2 + (z - (R_2 - a - d))^2 = R_2^2 \tag{61}$$

Para pontos próximos à segunda face, temos

$$z = a + d + \zeta$$

com $|\zeta| \ll |a+d|$. Então,

$$x^2 + y^2 + (a + d + \zeta = (a + d - R_2))^2 = R_2^2 \tag{62}$$

ou

$$x^2 + y^2 + (\zeta + R_2)^2 = R_2^2 \tag{63}$$

e, usando o fato de que $|\zeta|$ é pequeno,

$$x^2 + y^2 + R_2^2(1 + \frac{2\zeta}{R_2})^2 = R_2^2 \tag{64}$$

e, finalmente,

$$x^2 + y^2 + 2\zeta R_2 = 0 \tag{65}$$

que podemos por na forma

$$\zeta = -\frac{x^2 + y^2}{2R_2} \tag{66}$$

O eikonal do segundo raio refratado é

$$S = -\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_{O_2})^2} \tag{67}$$

onde $z_{O_2} = a + d + b$, o que dá

$$S = -\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a - d - b)^2} \tag{68}$$

O sinal (-) é devido ao fato de se tratar de uma onda esférica que está se contraindo para o ponto O_2. De fato, uma onda esférica que *sai* da origem é

$$\frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r}$$

ao passo que uma onda esférica que *chega* na origem é dada por

$$\frac{e^{i(-kr-\omega t)}}{r} \ .$$

Perto da segunda face da lente, temos

$$S = -\sqrt{x^2 + y^2 + (a + d + \zeta - a - d - b)^2} \tag{69}$$

ou

$$S = -\sqrt{x^2 + y^2 + (\zeta - b)^2} \tag{70}$$

Para pequenas aberturas,

$$\begin{aligned} S_2 &= -\sqrt{(b-\zeta)^2(1 + \frac{x^2 + y^2}{(b-\zeta)^2})} \\ &= -(b-\zeta)(1 + \frac{x^2 + y^2}{2(b-\zeta)^2}) \\ &= -\{b - \zeta + \frac{x^2 + y^2}{2(b-\zeta)} \end{aligned}$$

ou

$$S = -\{b - \zeta + \frac{x^2 + y^2}{2b}\} \tag{71}$$

O eikonal do primeiro raio refratado, quando ele atinge as proximidades da segunda face da lente, é

$$S' = n\sqrt{x^2 + y^2 + (a + d + \zeta - a + r)^2} \tag{72}$$

onde resolvemos denotá-lo por S' para distinguí-lo do eikonal do segundo raio refratado. Temos, após uma simplificação,

$$S' = n\sqrt{x^2 + y^2 + (\zeta + d = r)^2} \tag{73}$$

Para pequenas aberturas,

$$\begin{aligned} S' &= n\sqrt{(r + d + \zeta)^2 (1 + \frac{x^2 + y^2}{(r + d + \zeta)^2}} \\ &= n(r + d + \zeta)(1 + \frac{x^2 + y^2}{2(r + d + \zeta)^2}) \end{aligned}$$

ou, finalmente,

$$S' = n(r + d + \zeta + \frac{x^2 + y^2}{2(r + d)}) \tag{74}$$

Devemos então ter, na segunda face,

$$n(r + d + \zeta + \frac{x^2 + y^2}{2(r + d)} + S_0)_{Sup} = -(b - \zeta + \frac{x^2 + y^2}{2b})_{Sup} \tag{75}$$

onde o cálculo deve ser feito para os pontos da segunda superfície da lente, ou seja, para

$$\zeta = -\frac{x^2 + y^2}{2R_2} \tag{76}$$

Temos então

$$n(r + d - \frac{x^2 + y^2}{2R_2} + \frac{x^2 + y^2}{2(r + d)} + S_0) = -(b + \frac{x^2 + y^2}{2R_2} + \frac{x^2 + y^2}{2b}) \tag{77}$$

que dá as equações

$$nr + nd + nS_0 + b = 0 \tag{78}$$

e

$$-\frac{n}{2R_2} + \frac{n}{2(r + d)} + \frac{1}{2R_2} + \frac{1}{2b}) = 0 \tag{79}$$

ou

$$\frac{n - 1}{R_2} = \frac{1}{b} + \frac{n}{r + d} \tag{80}$$

5.3 A equação dos focos conjugados

A solução do problema consiste em combinar as Eqs.(59) e (80) para eliminar r. Da Eq.(59) temos

$$\frac{r}{n} = \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{n-1}{R_1}} \tag{81}$$

e, da Eq.(80),

$$\frac{r+d}{n} = \frac{1}{\frac{n-1}{R_2} - \frac{1}{b}} \tag{82}$$

Subtraindo a primeira da segunda, temos

$$\frac{d}{n} = \frac{1}{\frac{n-1}{R_2} - \frac{1}{b}} + \frac{1}{\frac{n-1}{R_1} - \frac{1}{a}} \tag{83}$$

que é a equação dos focos conjugados para uma lente de espessura d e para pequenas aberturas. Se $d = 0$, obtém-se

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) = \frac{1}{f} \tag{84}$$

que é a equação usual, para lentes delgadas.