Magnetismo da matéria

Henrique Fleming

13 outubro 2001

1 Introdução

Tratamos, nestas notas, o *formalismo* adequado para o tratamento macroscópico do magnetismo na presença de meios materiais (condutores). Um tratamento completo do tópico requer ainda (e principalmente) um tratamento da parte experimental, com exemplos de materiais diamagnéticos, paramagnéticos e ferromagnéticos e uma descrição mais detalhada de suas propriedades. Como, por exemplo, como se comportam (distintamente, conforme o caso) diante de um ímã, etc. Para um tratamento introdutório recomendamos Purcell [1]; Sommerfeld [2] e [3] contêm mais detalhes e alguma coisa sobre a teoria dos domínios de Weiss, no ferromagnetismo.

2 A magnetização

No vácuo, para correntes estacionárias, sabemos que

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{1}$$

Na presença de matéria podemos imaginar que o campo magnético vá afetar, ou mesmo criar, correntes microscópicas (por exemplo, pelo mecanismo da indução eletromagnética). Consideremos um material condutor, como um ímã em forma de barra. Como não existe um circuito fechado, não pode haver correntes estacionárias macroscópicas. No entanto, pode haver correntes microscópicas. Suponhamos que estas sejam descritas por uma densidade de corrente $\vec{j}_m$, onde o índice m significa microscópico. Logo, podemos precisar melhor a equação acima. Ela será:

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_m \tag{2}$$

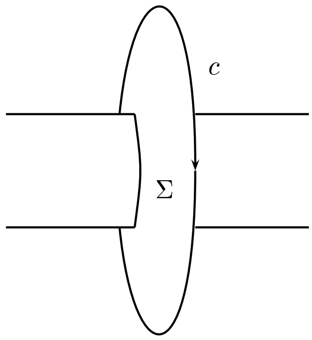
Essas correntes não trasportam carga (fazem-no de um ponto para o outro do átomo, mas não macroscopicamente). Em qualquer seção do condutor, portanto, teremos

$$\int \vec{j}_m.\vec{n}dS = 0 \tag{3}$$

Consideremos esta última relação como uma equação, $\vec{j}_m$ sendo a incógnita. A solução trivial é $\vec{j}_m = 0$. Será ela a única? Não. Seja $\vec{M}$ um campo vetorial nulo fora do condutor e tal que

$$\vec{j}_m = c\, rot \vec{M} \tag{4}$$

Tomemos uma superfície qualquer Σ que corte o condutor e prolonguêmo-la um pouco além da superfície do condutor.



Seja c a curva que é a fronteira dessa superfície, como mostra a figura. Orientemos c escolhendo um sentido de percurso e escolhamos uma normal à superfície Σ cujo sentido esteja coordenado com o sentido de percurso na curva pela regra do saca-rolhas. Então,

$$\int_{\Sigma} \vec{j}_m.\vec{n} dS = c \int_{\Sigma} rot\ \vec{M}.\vec{n} dS = c \oint_c \vec{M}.\vec{dl} \tag{5}$$

pelo teorema de Stokes. Ora, c é externa ao condutor, e $\vec{M}$ é, aí, zero. Logo,

$$\int_{\Sigma} \vec{j}_m.\vec{n} dS = 0 \tag{6}$$

É claro que esta solução generaliza a solução trivial, que é obtida para $\vec{M} = 0$.

Voltando à Eq.(2), temos, agora,

$$rot\ \vec{B} = \frac{4\pi}{c} c\, rot\ \vec{M} \tag{7}$$

ou

$$rot(\vec{B} - 4\pi\vec{M}) = 0 \tag{8}$$

Definindo um novo campo $\vec{H}$ como

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \tag{9}$$

temos

$$rot\ \vec{H} = 0 \tag{10}$$

quando as únicas correntes presentes são as microscópicas (também chamadas "correntes de magnetização" ou "correntes de Ampère"). Enquanto $rot\ \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$ diz que, sempre que existe uma corrente (macroscópica ou microscópica) existe um $\vec{B}$, a relação (10), ou, para ser mais completo, a relação equivalente

$$rot\ \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_M \tag{11}$$

(onde $\vec{j}_M$ é a densidade de corrente macroscópica) diz que, sempre que houver uma corrente *macroscópica*, haverá necessariamente um $\vec{H}$. Ou seja, $\vec{H}$ está relacionado às correntes macroscópicas da mesma forma que $\vec{B}$ está relacionado à corrente *total*. Uma forma imprecisa[1] , mas útil (por ser mnemônica), de dizer isto é a seguinte: enquanto qualquer corrente é fonte de $\vec{B}$, só as correntes macroscópicas são fontes de $\vec{H}$.

3 Equações constitutivas

Para uma classe muito importante de materiais existe uma relação muito simples entre $\vec{B}$ e $\vec{H}$:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} \tag{13}$$

onde μ é uma quantidade característica da substância, denominada *permeabilidade magnética*. Esta relação não é uma lei básica do magnetismo, como, por exemplo, $div\vec{B} = 0$, mas sim uma propriedade de uma classe específica de substâncias. Relações deste tipo, que suplementam as equações de Maxwell, chama-se *equações constitutivas*. Os materiais que satisfazem a Eq.(13) chama-se diamagnéticos ou paramagnéticos. Os diamagnéticos se assemelham aos dielétricos: fazem decrescer o valor do campo. Os paramagnéticos têm o efeito contrário. Uma outra classe importante de materiais magnéticos é constituída pelos *ferromagnéticos*, materiais que amplificam enormemente o valor do campo magnético que age sobre eles. A relação entre $\vec{B}$ e $\vec{H}$ para ferromagnetos é muito mais complicada, sendo altamente não-linear.

Como exemplo do uso das equações constitutivas, vamos calcular o valor do campo magnético no interior de um solenóide dentro do qual foi inserido um cilindro de material magnético de permeabilidade μ. Neste caso a determinação de $\vec{B}$ é muito complicada, pois teríamos de levar em conta as correntes microscópicas que nascem na substância sob a ação do campo do solenoide. Para $\vec{H}$, por outro lado, essas correntes microscópicas são irrelevantes. Se o material inserido não quebrar a simetria do problema, podemos calcular $\vec{H}$ usando a lei

[1]Imprecisa porque o termo fonte se refere ao divergente do campo, e não ao rotacional. Assim, a fonte do campo elétrico é a carga, pois

$$div\vec{E} = 4\pi\rho \tag{12}$$

circuital de Ampère, da mesma forma que a usamos para calcular $\vec{B}$ para o solenoide vazio. Obtemos (detalhes no Apêndice)

$$H = \frac{4\pi n i}{c} \tag{14}$$

e, então,

$$B = \frac{4\pi \mu n i}{c} \tag{15}$$

onde usamos, na última passagem, a equação constitutiva.

4 Interpretação de $\vec{M}$

Sabemos que o momento de dipolo magnético de uma distribuição de correntes estacionárias é

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\int dV \vec{r} \times \vec{j} \tag{16}$$

Qual é o momento de dipolo magnético gerado pelas correntes microscópicas? Usando a expressão (4),

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\int dV \vec{r} \times c\, rot\, \vec{M} \tag{17}$$

Um cálculo simples (veja o Apêndice) leva ao seguinte resultado:

$$\left(\frac{1}{2c}\int dV \vec{r} \times \vec{j}\right)_i = \left(\int dV \vec{M}\right)_i + \frac{1}{2}\left(\int dV \vec{\nabla}(\vec{r}.\vec{M})\right)_i - \frac{1}{2}\int dV\ div\,(M_i \vec{r}) \tag{18}$$

Como $\vec{j} = 0$ fora do condutor, essas integrais podem ser tomadas como integrais em todo o espaço. A última delas é

$$-\frac{1}{2}\int dV\ div(M_i \vec{r}) = -\frac{1}{2}\int_S M_i\ \vec{r}.\vec{n} dS = 0 \tag{19}$$

pois, na segunda integral, a superfície está fora do condutor, onde $\vec{M} = 0$. Para calcular a penúltima usaremos uma conseqüência do teorema do divergente que eu chamo de teorema de Pauli-Gauss: seja a uma função (campo escalar). Então, (Apêndice!)

$$\int dV \vec{\nabla} a = \int a\ \vec{n}\ dS \tag{20}$$

onde $\vec{n}$ é, como de costume, a normal externa à superfície S que envolve o volume V. Temos então que

$$\int dV \vec{\nabla}(\vec{r}.\vec{M}) = \int_S (\vec{r}.\vec{M})\ \vec{n} dS = 0 \tag{21}$$

pois $\vec{M} = 0$ fora do condutor. Em conseqüência,

$$\vec{m} = \frac{1}{2c}\int dV\ \vec{r} \times \vec{j}_m = \int dV\ \vec{M} \tag{22}$$

ou seja, $\vec{M}$ é o momento magnético de dipolo por unidade de volume. $\vec{M}$ é denominado *magnetização* do material [2].

5 Correntes superficiais

Na realidade, um papel essencial é desempenhado pelas correntes superficiais, que foram abandonadas no nosso primeiro tratamento. As correntes de superfície são descritas por um vetor $\vec{\sigma}$ definido assim: $\vec{\sigma}$ é tangente à superfície do condutor; seja c uma curva que é a intersecção, com a superfície do condutor, de um plano que o atravessa. Seja $\vec{dl}$ um vetor infinitesimal tangente a essa curva. Então, a corrente superficial é dada por

$$i_S = \oint \sigma_\perp dl \tag{23}$$

estendendo-se a integral ao longo de toda a curva fechada. Aqui $\sigma_\perp$ é a componente de σ perpendicular a $\vec{dl}$. Seja $\vec{M}$ a magnetização do material. Vamos mostrar posteriormente que a corrente de magnetização de superfície é dada por $c\vec{M} \times \vec{n}$. Por enquanto, aceitemos que

$$\vec{\sigma} = c\vec{M} \times \vec{n} \tag{24}$$

Então, qual será a corrente gerada por essa densidade superficial de corrente? Como $\vec{dl}$ é tangente à superfície, o vetor $\frac{\vec{dl}}{dl}$ é um vetor unitário, tangente à superfície do condutor e também à curva c. O vetor $\vec{n}\times\frac{\vec{dl}}{dl}$ é tangente à superfície e perpendicular a $\frac{\vec{dl}}{dl}$ e é unitário. Logo, $\sigma_\perp$ é dada por

$$\vec{\sigma}.\left(\vec{n}\times\frac{\vec{dl}}{dl}\right) = c(\vec{M}\times\vec{n}).\left(\vec{n}\times\frac{\vec{dl}}{dl}\right) = -c\vec{M}.\frac{\vec{dl}}{dl} \tag{25}$$

Então

$$i_S = \oint \sigma_\perp dl = -c\oint \vec{M}.\vec{dl} \tag{26}$$

6 Tratamento completo da magnetização

Consideremos distribuições de correntes tais que

$$\int \vec{j}.\vec{n}dS + \int \sigma_\perp dl = 0 \tag{27}$$

Vamos mostrar que há soluções distintas de $\vec{j}=0$ e $\vec{\sigma}=0$. De fato, sejam

$$\begin{aligned} \vec{j} &= c\, rot\vec{M} && (28)\\ \vec{\sigma} &= c\vec{M}\times\vec{n} && (29)\end{aligned}$$

[2]Note que $\vec{M}$ é definido apenas por uma condição sobre o seu rotacional. Logo, à primeira vista, parece que temos ambigüidades, já que falta dizer o que é o seu divergente. Veremos mais tarde como esta ambiguidade é levantada quando se levam em conta as correntes superficiais.

Vamos mostrar que, qualquer que seja a superfície S e qualquer que seja a curva fechada c em torno da superfície,

$$\int c\, rot\vec{M}.\vec{n}dS + \oint c\left(\vec{M}\times\vec{n}\right)_{\perp} dl = 0 \tag{30}$$

A primeira integral dá, pelo teorema de Stokes,

$$c\oint \vec{M}.\vec{dl} \tag{31}$$

e a segunda, pelo que vimos na seção anterior, $-c\oint \vec{M}.\vec{dl}$. Logo, a Eq.(30) é satisfeita. Note-se que pode haver compensação: os dois termos não precisam ser, separadamente, nulos. Vamos agora calcular o momento magnético de dipolo devido a ambas as correntes. É praticamente uma repetição de cálculo feito anteriormente. A i-ésima componente de $\vec{m}$ é:

$$\begin{aligned} m_i &= \left(\frac{1}{2c}\int dV\vec{r}\times\vec{j}\right)_i + \left(\frac{1}{2c}\int dS\vec{r}\times\vec{\sigma}\right)_i & (32)\\ &= \int dV M_i + \left(\frac{1}{2}\int dV\vec{\nabla}(\vec{r}.\vec{M})\right)_i - \frac{1}{2}\int dV div(M_i\vec{r}) & (33)\\ &+ \left(\frac{1}{2}\int dS\vec{r}\times c(\vec{M}\times\vec{n})\right)_i \end{aligned}$$

Como

$$\vec{r}\times(\vec{M}\times\vec{n}) = (\vec{r}.\vec{n})\vec{M} - (\vec{r}.\vec{M})\vec{n}$$

temos

$$\frac{1}{2c}\int dS\vec{r}\times c(\vec{M}\times\vec{n}) = \frac{1}{2}\int dS(\vec{r}.\vec{n})\vec{M} - \frac{1}{2}\int dS(\vec{r}.\vec{M})\vec{n} \tag{34}$$

Além disso,

$$\int dV div(M_i\vec{r}) = \int dS\ M_i(\vec{r}.\vec{n}) = \left(\int dS\vec{M}(\vec{r}.\vec{n})\right)_i \tag{35}$$

Logo, temos precisamente

$$\vec{m} = \int dV\vec{M} \tag{36}$$

e, assim, também quando se consideram as correntes superficiais, a magnetização é o momento de dipolo magnético por unidade de volume.

Como a relação definidora de $\vec{M}$ envolve só o seu rotacional, podemos construir infinitos $\vec{M}$ equivalentes adicionando a um deles o gradiente de uma função arbitrária, pois

$$\vec{j} = c\, rot\vec{M} = c\, rot(\vec{M} + grad\ \phi) \tag{37}$$

e

$$rot\ grad = 0$$

Vamos mostrar que $\vec{M}' = \vec{M} + grad\ \phi$ ainda é solução da Eq.(27). De fato, vimos que o último termo dessa equação pode ser escrito, quando se insere a expressão para $\vec{\sigma}$ em termos de $\vec{M}$, como

$$-c \oint \vec{M}.\vec{dl} \tag{38}$$

Acrescentando-se a $\vec{M}$ um termo da forma $grad\ \phi$ teremos, na última equação, a adição de um termo

$$-c \oint \vec{\nabla}\phi.\vec{dl} \tag{39}$$

que é zero, pois

$$\vec{\nabla}\phi.\vec{dl} = \vec{\nabla}\phi.\frac{\vec{dl}}{dl}dl = \frac{d\phi}{dl}dl = d\phi$$

e

$$\oint d\phi = 0$$

Logo, a Eq.(27) ainda é satisfeita. A densidade de corrente $\vec{j}$ não é alterada pela adição do gradiente, mas a densidade superficial de corrente é. Logo, a flexibilidade na escolha de $\vec{M}$ efetivamente não existe, pois os diversos $\vec{M}$ possíveis correspondem a densidades superficiais de correntes diferentes, e elas são quantidades mensuráveis. Este fato não é só de interesse acadêmico: note que

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \tag{40}$$

de maneira que, se $\vec{M}$ tiver alguma ambigüidade, $\vec{H}$ também terá.

7 Apêndice

Neste apêndice reunimos vários cálculos omitidos no texto principal, em favor de uma leitura mais fluente.

7.1 O "cálculo simples"

Trata-se de calcular

$$\vec{r} \times rot\ \vec{M} \tag{41}$$

A i-ésima componente desta quantidade é:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{r} \times rot\vec{M}\right)_i &= \epsilon_{ijk}x_j(rot\vec{M})_k \\
&= \epsilon_{ijk}x_j\epsilon_{klm}\partial_l M_m \\
&= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}x_j\partial_l M_m \\
&= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{lj})x_j\partial_l M_m \\
&= x_j\partial_i M_j - x_j\partial_j M_i
\end{aligned}$$

Ora,

$$x_j \partial_i M_j = \partial_i (\vec{r}.\vec{M}) - \delta_{ij} M_j = \partial_i (\vec{r}.\vec{M}) - M_i = \left(\vec{\nabla}(\vec{r}.\vec{M}) - \vec{M}\right)_i$$

e

$$x_j \partial_j M_i = \partial_j (x_j M_i) - (\partial_j x_j) M_i = div(M_i \vec{r}) - 3M_i$$

Levando à expressão anterior, temos

$$\left(\vec{r} \times \vec{M}\right)_i = \left(\vec{\nabla}(\vec{r}.\vec{M}) - \vec{M}\right)_i - div(M_i \vec{r}) + 3M_i \tag{42}$$

ou, finalmente,

$$\left(\vec{r} \times rot\vec{M}\right)_i = 2\vec{M}_i + \left(\vec{\nabla}(\vec{r}.\vec{M})\right)_i - div(M_i \vec{r}) \tag{43}$$

que era o resultado procurado.

7.2 Cálculo do $\vec{H}$ de um solenoide

A base para a validade da lei circuital de Ampère é a relação

$$rot\vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \tag{44}$$

onde $\vec{j}$ é a corrente total, composta de uma corrente macroscópica e de uma corrente microscópica. Para o campo $\vec{H}$, porém, a relação que vale é

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_M \tag{45}$$

onde $\vec{j}_M$ é a corrente *macroscópica*. Então o cálculo de $\vec{H}$ quando existe um material magnético no solenoide é idêntico ao cálculo de $\vec{B}$ para o solenoide vazio. Ora, para o solenoide vazio tínhamos

$$B = \frac{4\pi n i}{c} \tag{46}$$

logo, para o solenoide "recheado" temos

$$H = \frac{4\pi n i}{c} \tag{47}$$

Segue ainda, da relação $\vec{B} = \mu\vec{H}$, que

$$B = \frac{4\pi n i \mu}{c} \tag{48}$$

onde μ é a permeabilidade magnética do "recheio".

7.3 O teorema de Pauli-Gauss

Seja $\vec{v}$ um campo vetorial uniforme (ou seja, constante espacialmente), e a um campo escalar (uma função real). Vamos aplicar o teorema do divergente ao campo vetorial $a\vec{v}$. Temos

$$\int dV div(a\vec{v}) = \int_S dSa\vec{v}.\vec{n} \tag{49}$$

Por outro lado,

$$div(a\vec{v}) = a\ div\vec{v} + grad\ a.\vec{v} \tag{50}$$

e, como $\vec{v}$ é constante, $div\ \vec{v} = 0$. Logo,

$$div(a\vec{v}) = grad\ a.\vec{v} \tag{51}$$

Levando este resultado à Eq.(49), temos

$$\int dV grad\ a.\vec{v} = \int_S dSa\vec{v}.\vec{n} \tag{52}$$

Mas $\vec{v}$ é constante, portanto pode ser colocado fora das integrais:

$$\vec{v}. \int dV grad\ a = \vec{v}. \int_S dSa\ \vec{n} \tag{53}$$

Como $\vec{v}$ é arbitrário (fora o fato de ser constante), temos

$$\int dV grad\ a = \int_S dSa\ \vec{n} \tag{54}$$

References

[1] E. Purcell, *Electricity and Magnetism*, Coleção Berkeley, Vol.2

[2] A. Sommerfeld, *Electrodynamics*, Academic Press

[3] A. Sommerfeld, *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Academic Press